

Datum: 7 sepr, 2006

Uitsluitend voor persoonlijk gebruik / for personal use only



Technische Universiteit Delft

Bibliotheek
Prometheusplein 1
Postbus 98
2600 MG Delft
Tel: +31 (0) 15 27 85678
Fax: +31 (0) 15 27 85706
Email: library@tudelft.nl
www.library.tudelft.nl

Aan: TU DELFT FACULTEIT 3ME; J.D.G. KOOIJMAN
ENGINEERING MECHANICS, AFDELING PMA

MEKELWEG 2
2628 CD DELFT

NEDERLAND

Aanvraag nr: 1241456

Uw referentie(s): HER49

Artikelomschrijving:

Aantal kopieën: 31

Artikel: DE STABILITEIT VAN HET RIJWIEL

Auteur:

Titel: RAPPORT VAN HET INSTITUUT VOOR RIJWIELONTWIKKELING

Jaar: 1000 **Vol.** **Nr.** 3 **Pag.** GEEN IDEE

Plaatsnummer: DOI 0340

8/4'49^e

JRO Rapport nr 3

DE STABILITEIT VAN HET RIJWIEL.

The stability of the bicycle

Instituut voor Rijwielontwikkeling
Delft, The Netherlands
1949

Draft v1: November 6, 2006
Translation by: J.D.G. Kooijman

I N H O U D.

<u>Hoofdstuk</u>	<u>Pag.</u>
1. Inleiding	1
2. De aard van de bewegingen van een rijdend rijwiel.	2
3. Kinematische betrekkingen en verklaring van de gebruikte notaties.	5
4. De bewegingsvergelijkingen.	8
5. Afleiding der stabiliteitsvoorwaarden.	15
6. Conclusies, die uit de stabiliteitsvoorwaarden getrokken kunnen worden.	16
7. Verdere uitbreiding van het stabiliteitsonderzoek,	21

* *

*

Contents

1	Introduction	1
2	The nature of the motion of a moving bicycle	2
3	Kinematic relations and the declaration of the used notation	5
4	The equations of motion	8
5	Derivation of the stability conditions	15
6	Conclusions,that can be drawn from the stability conditions	16
7	Further extensions to the stability research	21

* *
*

DE STABILITEIT VAN HET RIJWIEL.

1. Inleiding.

Iedereen, die wel eens uiteenlopende typen van rijwielen heeft bereden, heeft ondervonden, dat, in het bijzonder bij lage snelheden, de constructie van de fiets een belangrijke invloed heeft op het gemak waarmee men zich in evenwicht kan houden.

Het is dan ook begrijpelijk, dat reeds korte tijd, nadat het rijwiel zijn intrede had gedaan, pogingen zijn ondernomen om na te gaan welke invloed de stuurashelling, de naloop, de zwaartepuntsligging, het gewicht van het voorwiel en andere grootheden van de fiets op de stabiliteit van het rijden uitoefenen om zodoende tot de meest gunstige constructie te komen.

De wiskundige moeilijkheden en vooral de bewerkelijkheid van de uit te voeren berekeningen, waar men bij deze pogingen op stuitte, waren echter zo groot, dat het bij pogingen is gebleven. Wel hebben Carvallo*) en Whipple**) omstreeks 1900 voor een gegeven rijwiel het snelheidsgebied, waar binnen het stabiel is, bepaald en enige algemene aanwijzingen gegeven. Deze artikelen zijn echter in specifiek wiskundige tijdschriften gepubliceerd en de gegeven aanwijzingen waren van te beperkte waarde om enige invloed op de ontwikkeling van de rijwielconstructie te kunnen uitoefenen. Zo heeft zich de fiets geheel volgens inzichten van de practijk ontwikkeld en men is gekomen tot een algemeen aanvaard model, waarvan men aanneemt, dat het het juiste compromis voorstelt tussen de eisen, die niet alleen de stabiliteit, maar ook de sterkte, de menselijke houding, de eenvoud van constructie en de fabricagekosten stellen.

Het blijft echter een onbevredigende toestand, dat een rijwielconstructeur niet bij machte is, de consequenties te overzien van het aanbrengen van enigszins ingrijpende veranderingen in een nieuw model en dat hij niet weet, welke maatregelen hij moet nemen om bijvoorbeeld een fiets te construeren, die ook bij lage snelheid nog goed berijdbaar moet zijn. Ook een objectieve vergelijking van de eigenschappen van het in Nederland gebruikelijke rijwieltypen met die van het Franse model, is voorshands nog niet mogelijk.

Om deze redenen werd besloten om in een serie monografieën de fundamentele problemen van het rijwiel zo grondig mogelijk onder de loupe te nemen. In dit rapport zal

*) Journal de l'école polytechnique. 2de serie, Vol. 5 et 6, 1900 en 1901.

**) Quarterly Journal of Mathematics. Vol. 30, 1899.

1 Introduction

Everyone that has ridden a variety of different bicycles will have experienced, particularly at low speed, that the construction of the bicycle largely influences the ease with which one can balance oneself.

Therefore it is understandable that, shortly after the bicycle was introduced, attempts were all ready undertaken to examine what the influence of the head-angle, trail, position of the centre of gravity, the weight of the front wheel and other bicycle parameters have on the stability of the bicycle in order to reach an optimal construction.

The mathematical difficulties and particularly the complexity of the calculations, that were encountered during these attempts, were so large, that they remained at attempts. However around 1900 Carvello ¹ and Whipple ² did calculate, for a given bicycle, the speed range within which the bicycle is stable, and give some general suggestions. However, these articles were published in mathematical journals and the given suggestions were to restricted to be of any influence in the development of the bicycle's construction. The bicycle has thus developed solely on the insight gained from practical experience and has lead to a generally accepted model. It is assumed that this design represents the best compromise between the demands laid upon it by, not only the stability, but also the strength, the position of the rider, the simplicity of the construction and the production costs.

However it remains a dissatisfying situation that bicycle manufacturers are not capable of overseeing the consequences of somewhat radical design changes to a new model and that they do not know what measures to take to, for instance, design a bicycle that is also well rideable at low speeds. Also it is presently not possible to compare, objectively, the properties of the style of bicycle commonly seen in the Netherlands with that of the French model.

For this reason it was decided to review the fundamental problems of the bicycle design as thoroughly as possible in a monograph serie. This report

¹Journal de l'école polytechnique. 2nd serie, Vol.5 et 6, 1900 and 1901.

²Quarterly Journal of Mathematics. Vol. 30, 1899.

alleen de stabiliteit behandeld worden, maar het ligt in de bedoeling om het te zijner tijd te laten volgen door studies betreffende uitwendige belastingen, sterkte, stijfheid en physiologie.

2. De aard van de bewegingen van een rijdend rijwiel.

In deze paragraaf zullen ter gedachtebepaling en vooruitlopend op de, in de volgende paragrafen, gemaakte berekeningen enige facetten van de beweging van een rijdende fiets worden besproken. Deze beschouwingen zullen echter geen aanspraak maken op exactheid, noch op volledigheid.

Wanneer men een fiets, voorzien van een berijder die zich niet beweegt en volkomen star met het frame is verbonden, maar die het stuur geheel vrij laat, een bepaalde snelheid zou geven, dan is het theoretisch mogelijk, dat hij zich rechtlijnig zou blijven voortbewegen, mits hij in nauwkeurig verticale stand zou worden losgelaten en er zich geen storende invloeden voordoen zoals oneffenheden in de weg, zijdelingse windstoten en wat dies meer zij. In de praktijk is dit natuurlijk onmogelijk, omdat genoemde storingen, hoe gering ook, altijd aanwezig zullen zijn. Het gaat er nu maar om hoe deze fiets zal reageren op een kleine afwijking van de rechtvooruitgaande beweging; m.a.w. of een toevallige aanwezige stuuruitslaghoek β of hoek ϵ tussen frame en verticaal automatisch groter of kleiner zal worden.

Van het een en ander kan men zich trachten reken-schap te geven door de volgende beschouwingen:

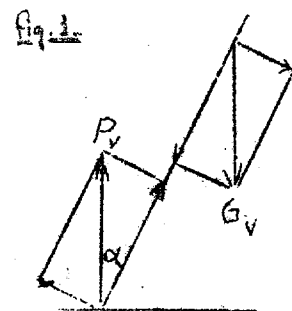
Indien de fiets naar rechts helt, zal het stuur naar rechts moeten uitslaan, opdat zodoende opgewekte middelpuntvliedende kracht naar links de fiets weer in zijn verticale stand kan terugbrengen, anders zal de helling naar rechts steeds groter worden en de fiets zal omvallen.

Voor de stabiliteit zijn dus van belang die effecten, die het stuur trachten te doen uitslaan naar de zijde waarheen het rijwiel helt.

Deze effecten zijn:

1. de naloop.

Fig. 1 stelt het achteraan-zicht van de fiets voor. Is er geen stuuruitslag, dus beschrijft de fiets een rechtlijnige beweging, dan zal de grondreactie verticaal omhoog gericht zijn. Wij merken op, dat de kracht P_v op het voorwiel een component heeft, loodrecht op het voorwielvlak gericht, tegengesteld aan de richting van omvallen. Lig dit



only treats the stability, but the intention is to, in due time, to follow on with studies on the external loading, strength, stiffness and physiology

2 The nature of the motion of a moving bicycle

In this chapter some of the facets of a moving bicycle will be discussed in order to introduce a manner of thinking ahead of the calculations that will be carried out in the following chapters. The discussed aspects are however, neither exact nor complete.

When one takes a bicycle with a non-moving, rigidly attached, rider who is in the hands free situation, and gives this bicycle a certain speed, then theoretically, it is possible that the bicycle will move in a straight line provided that the bicycle is released perfectly vertically and no external disturbances take place such as unevenness in the road surface, lateral wind gusts etc. In practice this is obviously impossible as the mentioned disturbances, however small, will always be present. Of interest is how the bicycle will react to a small deviation from the straight ahead and upright position. In other words, if by coincidence there happens to be a small handlebar rotation β or angle ε between the frame and the vertical will this angle automatically become smaller or larger.

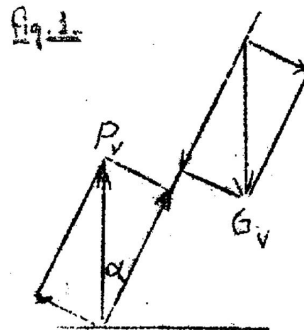
One can attempt to account for a number of aspects by considering the following:

If a bicycle leans over to the right, the handlebars also have to turn to the right, such that the induced centripetal force, acting to the left, return the bicycle to its vertical position, otherwise the lean angle to the right will increase and the bicycle will fall over.

Those effects that try to turn the handlebar in the same direction as that the bicycle is leaning are of importance for the stability of the bicycle.

1. Trail

Fig.1 represents a rear view of the bicycle. If there is no steering angle and bicycle moves in a straight line, then the reaction force from the ground, will be directed vertically upwards. Note that the force P_v acting on the front wheel has a component directed perpendicular to the wheel plane and acting in the opposite direction to the the direction that the bicycle wants to fall over.



steunpunt van het voorwiel nu achter de stuuras, dan zal deze component een moment om de stuuras in de gewenste/uitoefenen en het stuur zal uitslaan naar de valzijde. /richting

2. de zwaartepuntsligging van het voorwielstuurgedeelte.
In fig. 1 ziet men dat het gewicht van het stuurvoorwielgedeelte een component loodrecht op het voorwielvlak heeft, werkend in de richting van het omvallen. Indien het zwaartepunt hiervan vóór de stuuras ligt, zal het stuur ook in deze richting uitslaan.

3. de gyroscopische werking van het voorwiel.
Indien men een fiets, met het voorwiel draaiend in de normale zin, een draaiing geeft om zijn langsas, dan zal het stuur uitslaan in de gewenste richting. Men kan dit duidelijk waarnemen aan een fiets, die men heeft opgehangen aan het achterwiel. Een zwaar en groot voorwiel is dus gunstig voor de stabiliteit.

4. het traagheidsmoment van het stuurvoorwielgedeelte om de stuuras.

Hoe kleiner dit traagheidsmoment is, des te sneller zal het stuur door de onder 1, 2 en 3 genoemde momenten draaien.

Deze maatregel is echter moeilijk te combineren met de vorige. Hoe groter immers de naloop, de voorlijke zwaartepuntsligging van het voorwielstuurgedeelte en het wiel, hoe groter is het traagheidsmoment daarvan om de stuuras.

Wij hebben door deze vier punten een indruk gekregen van de invloeden, die bij de stabiliteit van belang zijn. Maar quantitative gegevens zijn met deze eenvoudige beschouwingen niet te verkrijgen. Evenmin is op deze manier het onderling verband van de genoemde effecten of de invloed van de stuurashelling te vinden.

In de volgende paragraaf is afgeleid, dat de algemene beweging van een fiets wordt weergegeven door vergelijkingen als:

$$\xi = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + e^{a_3 t} (C_3 \sin bt + C_4 \cos bt) \dots (1)$$

Hierin is: ξ = de hoek tussen frame-vlak en verticaal;
 e = 2,7183, het grondtal van de natuurlijke logaritmie.

t = de tijd in seconden

C_1, C_2, C_3, C_4 zijn constanten, die de bewegingstoestand ten tijde $t = 0$ bepalen.*).

*) Als de fiets ten tijde $t = 0$ precies verticaal staat, met het stuur in de middenstand, dan is $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ en blijft $\xi = 0$ en $\beta = 0$.

If the contact point of the front-wheel with the ground is located behind the steering axis, then this force component will cause a moment to act in the desired direction causing the handlebars to turn towards the side that it is leaning towards.

2. Position of the centre of gravity of the front-wheel & front-frame

Fig.1 shows that the weight of the front-frame & front-wheel has a component perpendicular to the plane of the front-wheel acting in the direction of falling over. when its centre of gravity is located in front of the steering axis, then the handlebars will also turn in this direction.

3. Gyroscopic effects of the front wheel

If a bicycle, with its front wheel rotating in the normal manner, is rotated about its lean axis, then the handlebars will turn in the desired direction. This can be demonstrated clearly with a bicycle that is suspended at its rear wheel. A heavy and large front-wheel is thus favourable for stability.

4. Moment of inertia of the front wheel & front-frame about the steering axis

The smaller this moment of inertia is, the faster the handlebars will rotate as a result of the moments mentioned in parts 1, 2 and 3.

This measure however, is difficult to combine with the other previously mentioned measures. After all the larger the trail, the further forward the centre of gravity of the front-frame and front-wheel and the centre of the front-wheel, the larger the moment of inertia about the steering axis will be.

With these four points we have been able get an impression of the effects that play a role in influencing the stability. It is however not possible to make quantitative assertions about the observations. Neither is it possible to find their underlying relationship between the different effects or the effect of the steering axis angle.

In the following chapter the derivation will be given for the general motion of the bicycle. It will be shown that the general motion of the bicycle can be described by equations such as:

$$\varepsilon = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + e^{a_3 t} (C_3 \sin bt + C_4 \cos bt) \quad (1)$$

where:

ε = the angle between the frame-plane and the vertical;

$e = 2.7183$, t = the time in seconds

C_1, C_2, C_3, C_4 are constants, that determine the initial conditions at time $t = 0$.³

³If the bike is completely vertical at time $t = 0$ and the handlebars in the straight ahead position, then $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ and ε and β will both remain = 0

a_1 , a_2 , a_3 , en b zijn grootheden, die afhangen van de afmetingen en gewichten van de fiets met berijder en van de snelheid.

Voor de stuuruitslag β geldt dezelfde vergelijking, maar met andere waarden voor C_1 , C_2 , C_3 en C_4 .

De grootheden a_1 , a_2 , a_3 en b hebben dezelfde waarde voor β en \mathcal{E} , waaruit duidelijk blijkt hoe de omvalbeweging en de sturbeweging gekoppeld zijn.

Bij nadere beschouwing blijkt, dat van doorslaggevende betekenis voor de stabiliteit is: het al of niet negatief zijn van a_1 , a_2 en a_3 . Is een van deze grootheden positief, dan is er altijd een term, die met de tijd steeds groter wordt. Dit is dan ook het geval met \mathcal{E} en de fiets zal dus vallen. Zijn a_1 , a_2 en a_3 daarentegen negatief, dan zullen alle termen steeds kleiner worden met de tijd, zodat een éénmaal aanwezige afwijking van de verticale stand automatisch weer verdwijnt.

Verder wordt nog opgemerkt, dat, tenzij $b = 0$, er een slingering zal optreden, waarvan de uitslagen steeds groter of kleiner zullen worden naar gelang a_3 positief of negatief is.

In fig. 2 is getekend hoe voor één bepaalde Nederlandse fiets a_1 , a_2 , a_3 en b afhangen van de snelheid. Men ziet hieruit, dat tussen 16 en 21,6 km/u alle a 's negatief en de beweging van deze fiets dus stabiel is. Boven 21,6 km/u is a_2 positief, maar zeer klein. In dit snelheidsgebied is de beweging onstabiel, maar deze onstabieliteit is zo gering, dat de berijder het omvallen met kleine langzame verplaatsingen van zijn zwaartepunt of van het stuur zal kunnen voorkomen.

Laten wij als voorbeeld eens aannemen, dat de snelheid 36 km/u bedraagt (dan is a_3 het grootst) en door een of andere oorzaak de omvalhoek zo groot is geworden, dat het zwaartepunt van de fiets 1 cm van de evenwichtsstand is verschoven, dan is deze afwijking na 50 m rijden nog maar 2 cm groter geworden, indien de berijder zich volkomen passief zou gedragen.

Daalt daarentegen de snelheid beneden de 16 km/u, dan zien wij, dat a_3 sterk positief gaat worden. Het zal in dit geval dus van de acrobatische aanleg en scholing van de berijder afhangen hoe langzaam men nog kan fietsen. De onstabieliteit treedt in dit geval op in de vorm van een steeds groter wordende slingering. Beneden 3 km/u is $b = 0$, dan zal de fiets dus omvallen zonder eerst een slingerende beweging uit te voeren.

Fig. 2 geldt, zoals reeds gezegd is, voor een bepaalde fiets. Berekent men een dergelijk diagram voor een fiets, die anders geconstrueerd is, dan vindt men in het algemeen andere waarden voor de beide stabiliteitsgrenzen A en B.

a_1 , a_2 , a_3 , and b are parameters that depend on the bicycle's dimensions, its speed and weight and the weight of the rider.

A similar equation can be derived for the steering angle β , but with different values for C_1 , C_2 , C_3 , and C_4 .

The variables a_1 , a_2 , a_3 , and b are the same for both the ε and β equations, clearly indicating that the tip over mode and the steering mode of the bicycle are coupled.

Upon further examination of the equations it appears that the stability of the bicycle depends on whether a_1 , a_2 and a_3 are negative in value. If any one of the variables is positive then there is always at least one term that will grow in time. This will then also be the case for ε , thus the bike will fall over. If a_1 , a_2 and a_3 however are all negative, then all the terms will get smaller in time such that an initial deviation from the upright will automatically disappear in time.

It should also be noted that, unless $b = 0$, an oscillation will take place, which will grow or decay depending on whether a_3 is positive or negative.

Fig.2 shows how, for a specific Dutch bicycle, a_1 , a_2 , a_3 and b depend on the speed. It shows that between 16 and 21.6 km/h all the a 's are negative and thus that the motion of the bicycle is stable. Above 21.6 km/h a_2 is positive, but very small. In this speed range the motion is unstable, but this instability is so small, that the rider can prevent the tipping over of the bicycle by small and slow movements of the his centre of gravity or of the handlebars.

In the following example let us assume that the speed of the bicycle is 36 km/h (then a_3 is largest). Also assume that for some reason the lean angle has become so large that the centre of gravity of the bicycle has moved 1 cm from its equilibrium position. Then the deviation of the centre of gravity from the equilibrium position, assuming that the rider acts completely passively (rigidly attached), will only have increased by 2 cm after 50 meters of cycling.

On the other hand if the speed drops below 16 km/h, then we see that a_3 becomes highly positive. How slow the bicycle can be ridden, will in this case, therefore depend on the acrobatic skills and training of the rider. The instability will be exhibited in the form of an ever growing oscillation. Below 3 km/h, $b = 0$ and thus the bicycle will tip over without first carrying out an oscillatory motion.

As stated earlier, Fig.2 applies for one specific bicycle. If such a figure is drawn for a bicycle, that is of a different construction, then in general the found values for the limits of stability A and B, will also differ.

In de volgende paragrafen zal nu worden onderzocht hoe deze grenzen afhangen van de afmetingen en de gewichtsverdeling van de fiets en zijn berijder.

De niet in de theoretische mechanica geschoolde lezer kan de paragrafen 3, 4 en 5 overslaan en onmiddellijk vervolgen met par. 6. Voor hem zij hier vermeld, dat

$$a_1, a_2, a_3 + b i \text{ en } a_3 - b i \text{ *)}$$

de wortels zijn van een vierde machtsvergelijking:

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

In par. 6 wordt de betekenis van $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en α_4 gegeven.

De voorwaarden voor het negatief zijn van a_1, a_2 en a_3 zijn nu:

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4, \alpha_3 > 0 \text{ en } \alpha_4 > 0.$$

Dit zijn dus de stabiliteitsvoorwaarden.

3. Kinematische betrekkingen en verklaring van de gebruikte notaties.

In fig. 3 is een fiets in zijn meest algemene stand getekend. Het rijwiel zelf is gekarakteriseerd door de beide wielstralen r_a en r_v , de lengte van de loodlijnen vanuit de middelpunten der wielen B_a en B_v , op de stuuras neergelaten e en d , en de afstand van de voetpunten dezer loodlijnen m .

De stand van het rijwiel in de ruimte is bepaald door coördinaten x en y van het steunpunt van het achterwiel ten opzichte van een in de grond verankerd assenhuis $O X Y Z$, waarvan het $X Y$ vlak met het grondvlak samenvalt; verder door de hoek θ tussen de snijlijn van het achterwielvlak met het grondvlak en de X -as, door de hoek ξ tussen achterwielvlak en de verticaal en de hoek ψ , die de verdraaiing van het stuur om zijn as aangeeft.

In fig. 3 vindt men buiten de hierbovengenoemde nog de volgende hoeken en afstanden:

p = de afstand tussen het steunpunt van het voorwiel S_v tot het snijpunt H van de stuuras met het grondvlak.

q = de afstand tussen het steunpunt van het achterwiel S_a met het snijpunt van de stuuras met het grondvlak.

*) $i = \sqrt{-1}$ of juist $i^2 = -1$

In the following chapters it will be examined how the stability boundaries for the bicycle depend on its dimensions and the weight distribution of the bicycle and rider.

Readers who are not at home in the theoretical mechanics can skip chapters 3, 4 and 5 and immediately continue with chapter 6. For them though we mention that:

$a_1, a_2, a_3 + b i$ and $a_3 - b i^4$
are the roots are of the fourth order equation:

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0 \quad (2)$$

In chapter 6 the meaning of $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ and α_4 is given.

The conditions for a_1, a_2 and a_3 to be negative are now:

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4, \alpha_3 > 0 \text{ and } \alpha_4 > 0.$$

Thus these are the stability conditions.

3 Kinematic relations and the declaration of the used notation

A bicycle in its most general state is drawn in fig.3. The bicycle is characterised by both its wheel-radii r_a and r_v , the length of the two lines e and d that are perpendicular to the steering axis (stuuras) and connect the wheel centres B_a and B_v to the steering axis, and the distance m between these two perpendicular lines measured along the steering axis.

The position of the bicycle is determined by coordinates x and y of the contact point of the rear wheel with respect to the global reference frame $O X Y Z$, of which the $X Y$ plane coincides with the ground plane. Furthermore by the angle θ between the line intersecting ground plane and the rear wheel plane, and the X -axis, by the angle ε between the rear wheel plane and the vertical and the angle ψ which is the angle rotated by the handlebars about its axis.

Besides those mentioned above, Fig.3 also shows the following angles and distances:

ρ = the distance between the contact point of the front wheel S_v and the intersection H of the steering axis with the ground plane.

q = the distance between the contact point of the rear wheel S_a and the intersection of steering axis with the ground plane.

⁴ $i = \sqrt{-1}$ or more correctly $i^2 = -1$

α = de hoek tussen de stuuras en de snijlijn van het achterwielvlak (= framevlak) met het grondvlak.

γ = de hoek tussen de stuuras en de snijlijn van het voorwielvlak met het grondvlak.

β = de hoek tussen de snijlijnen van het voor- en achterwielvlak met het grondvlak.

δ = de hoek tussen het voorwielvlak en de verticaal.

Tussen deze grootheden bestaan betrekkingen, waarvan men er enkele kan afleiden met behulp van de bekende formules van de drievlakshoek (zie fig. 4).

$$\operatorname{tg} \delta = \cot \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon} + \cos \beta \operatorname{tg} \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \psi} = \frac{\sin \alpha}{\cos \delta} = \frac{\sin \gamma}{\cos \varepsilon} \quad (4)$$

Om de dynamische eigenschappen van de fiets vast te leggen, worden de volgende assenkruisen aangenomen, die met het rijwiel meebewegen:

1. een assenkruis C_a X Y Z, verankerd in het frame, met de oorsprong in C_a , het gemeenschappelijke zwaartepunt van berijder, frame en achterwiel.
2. een assenkruis C_v X Y Z, verankerd in het met het stuur meedraaiende gedeelte met de oorsprong in C_v , het gemeenschappelijke zwaartepunt van voorwiel, stuur en voorvork, d.w.z. alle onderdelen, die bij draaiing van het stuur meebewegen.

De oriëntering van deze beide assenkruisen is zodanig, dat, indien de fiets verticaal staat met het stuur in de middenstand, de Z-as verticaal omhoog wijst, de X-as recht naar voren en de Y-as naar links.

Ten opzichte van deze assenkruisen worden de volgende traagheidsmomenten en -producten gedefinieerd:

$$\left. \begin{array}{l} I_{xa} = \text{traagheidsmoment} \\ I_{za} = \text{traagheidsmoment} \\ I_{xza} = \text{traagheidsproduct} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{van de berijder, het} \\ \text{frame- en achterwiel-} \\ \text{gedeelte, ten opzichte} \\ \text{van assenkruis } C_a \text{ X Y Z} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_{xv} = \text{traagheidsmoment} \\ I_{zv} = \text{traagheidsmoment} \\ I_{xzv} = \text{traagheidsproduct} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{van het voorwiel-,} \\ \text{stuur- en voorvorkge-} \\ \text{deelte ten opzichte van} \\ \text{assenkruis } C_v \text{ X Y Z} \end{array}$$

Omdat de assenkruisen met de desbetreffende gedeelten van de fiets meebewegen, zijn de grootheden I_{xa} , I_{xv} , enz. tijdens de beweging constant.

α = the angle between the steering axis and the line intersecting the rear wheel plane (rear frame plane) and the ground plane.

γ = the angle between the steering axis and the line intersecting the front wheel plane with the ground plane.

β = the angle between the lines intersecting the front and rear wheel plane with the ground plane.

δ = the angle between the front wheel plane and the vertical.

Relationships exist between these parameters, some of which can be derived using the well known formulas from the spherical trigonometry (see Fig.4)

$$\tan \delta = \cot \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon} + \cos \beta \tan \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \psi} = \frac{\sin \alpha}{\cos \delta} = \frac{\sin \gamma}{\cos \varepsilon} \quad (4)$$

In order to determine the dynamic properties of the bicycle, the following axes that move with the bicycle will be introduced:

1. coordinate system $C_a X Y Z$, connected to the rear frame, with the origin C_a , located in the combined centre of gravity for the rear- wheel and frame and the rider.
2. coordinate system $C_v X Y Z$, connected to the rotatable front frame with its origin C_v , located in the combined center of gravity for the front wheel, front fork and handlebars, in other words all the components that, upon rotating the handlebars rotate also move accordingly.

The orientation of these two local coordinate systems is such that when the bicycle is in the upright vertical position with the handlebars facing forward, the Z -axis is pointing vertically upwards, the X -axis points forward and the Y -axis to the left.

The following moments of inertia and product moments of inertia are defined with respect to these local coordinate systems.

$$\begin{array}{lll} I_{xa} & = & \text{moment of inertia} \\ I_{za} & = & \text{moment of inertia} \\ I_{xza} & = & \text{product moment of inertia} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l}) \\) \\) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{of the rider, the rear frame and} \\ \text{rear wheel, with respect to the} \\ \text{coordinate system } C_a X Y Z \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} I_{xv} & = & \text{moment of inertia} \\ I_{zv} & = & \text{moment of inertia} \\ I_{xzv} & = & \text{product moment of inertia} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l}) \\) \\) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{of the front wheel, handlebars} \\ \text{and fork, with respect to the} \\ \text{coordinate system } C_v X Y Z \end{array}$$

Since the local coordinate systems move together with the concerned parts, the values for I_{xa} , I_{xv} etc, do not change when the bicycles moves.

De plaats van de beide zwaartepunten C_a en C_v wordt gegeven door hun afstand tot het grondvlak h_a en h_v en door de afstanden u en a respectievelijk tot de verticalen door de steunpunten van achter- en voorwiel, met dien verstande, dat h_a , h_v , u en a gemeten worden aan de fiets in verticale stand met stuuruitslag = 0, zodat h_a , h_v , u en a constanten zijn, evenals f (= de horizontale afstand van C_v tot de stuuras.)

Wel variabel zijn gedurende de beweging alle hoeken ($\theta, \beta, \psi, \alpha, \gamma, \xi$ en δ), de afstanden p en q en de wielbasis b , evenals de coördinaten x en y van het steunpunt van het achterwiel.

In het vervolg zullen echter slechts kleine afwijkingen van de rechtvooruitgaande beweging van de fiets worden beschouwd. Dit betekent, dat aangenomen wordt, dat $\psi, \theta, \beta, \psi, \xi$ en δ oneindig klein van de 1e orde blijven! Het zal blijken, dat in dit geval de variaties van α, γ, p, q en b oneindig klein van de 2e. orde zijn. Noemt men n.l. α_0 de waarde, die α en γ hebben als $\beta = \psi = 0$ en stelt men

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \Delta\alpha \\ \text{en } \gamma &= \alpha_0 + \Delta\gamma \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dan leidt men af uit verg. (4), indien men oneindig kleinen van de 3e. orde verwaarloost:

$$\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) \cos \xi = \sin(\alpha_0 + \Delta\gamma) \cos \delta$$

$$(\sin \alpha_0 \cos \Delta\alpha + \cos \alpha_0 \sin \Delta\alpha) \cos \xi = (\sin \alpha_0 \cos \Delta\gamma + \cos \alpha_0 \sin \Delta\gamma) \cos \delta$$

$$\left\{ \sin \alpha_0 \left(1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2} + \dots\right) + \cos \alpha_0 (\Delta\alpha - \dots) \right\} \left(1 - \frac{\xi^2}{2} + \dots\right) =$$

$$\left\{ \sin \alpha_0 \left(1 - \frac{\Delta\gamma^2}{2} + \dots\right) + \cos \alpha_0 (\Delta\gamma - \dots) \right\} \left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \dots\right)$$

$$\Delta\alpha - \Delta\gamma = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_0 (\xi^2 - \delta^2) \dots \dots \dots (6)$$

Noemt men H_0 dat punt van de stuuras, dat in het grondvlak ligt, wanneer de stuuruitslag, dus ook $\beta = 0$, dan zal in het algemeen, indien β en $\xi \neq 0$ zijn, H_0 een zekere afstand onder (of boven) het grondvlak komen te liggen. Deze afstand kan men uitdrukken achtereenvolgens in $\Delta\gamma$ en p en in $\Delta\alpha$ en q en deze uitdrukkingen aan elkaar gelijk stellen. Zo vindt men, als $\Delta\alpha$ en $\Delta\gamma$ oneindig klein zijn:

The position of the two centres of gravity C_a and C_v are given by their distance to the ground plane h_a and h_v and by the distances u and a to the vertical lines through the rear- and front wheel's contact point respectively, measured under the condition that the bicycle is placed in the vertical upright position with the handlebars in the straight ahead position, such that h_a , h_v , u and a are constants just like f (= the horizontal distance from C_v to the steering axis).

All the angles (θ , β , ψ , α , γ , ε , and δ), the distances p and q and the wheelbase b , as well as the coordinates x and y of the contact point of the rear wheel are variable during the motion.

In the following only small deviations from the straight ahead motion will be considered. This means that it is assumed that when y , θ , β , ψ , ε and δ are infinitesimally small they remain 1st order! It will become evident that infinitesimally small variations in α , γ , p , q and b are of 2nd order. Namely if α_0 is the value that α and γ have when $\beta = \psi = 0$ and putting

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + \Delta\alpha \\ \gamma &= \alpha_0 + \Delta\gamma\end{aligned}\tag{5}$$

then from equation 4 and provided that infinitesimally small values of the 3rd order are neglected, one can deduce that:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) \cos \varepsilon &= \sin(\alpha_0 + \Delta\gamma) \cos \delta \\ (\sin \alpha_0 \cos \Delta\alpha + \cos \alpha_0 \sin \Delta\alpha) \cos \varepsilon &= (\sin \alpha_0 \cos \Delta\gamma + \\ \cos \alpha_0 \sin \Delta\gamma) \cos \delta \\ \left\{ \sin \alpha_0 \left(1 - \frac{\Delta\alpha^2}{2} + \dots \right) + \cos(\Delta\alpha - \dots) \right\} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \right) &= \\ \left\{ \sin \alpha_0 \left(1 - \frac{\Delta\gamma^2}{2} + \dots \right) + \cos(\Delta\gamma - \dots) \right\} \left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \dots \right) & \\ \Delta\alpha - \Delta\gamma &= \frac{1}{2} \tan \alpha_0 (\varepsilon^2 - \delta^2)\end{aligned}\tag{6}$$

If H_0 is the point along the steering axis at which the steering axis intersects the ground plane when the handlebars are in the forward position (and thus $\beta = 0$), then in general, if β and $\varepsilon \neq 0$, H_0 will lie a certain distance below (or above) the ground plane. This distance can be expressed in terms of $\Delta\gamma$ and p and in terms of $\Delta\alpha$ and q , and these two expressions can be equated. Thus for infinitesimally small $\Delta\alpha$ and $\Delta\gamma$ it is found that:

$$p \Delta \gamma = q \Delta \alpha \dots \dots \dots (7)$$

Uit verg. (6) en (7) lost men op:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \alpha &= -\frac{p}{q-p} \times \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_0 (\varepsilon^2 - \delta^2) \\ \Delta \gamma &= -\frac{q}{q-p} \times \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_0 (\varepsilon^2 - \delta^2) \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

Verg. (3) vereenvoudigt zich, indien men oneindig kleinen van de 3e. orde verwaarloost tot

$$\delta = \beta \cot \alpha + \varepsilon \dots \dots \dots (9)$$

Vult men vergelijking (9) in in vergelijking (8) en stelt men $q - p = b$, dan wordt:

$$\Delta \alpha = \frac{p}{b} (\varepsilon \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \cot \alpha) \dots \dots \dots (10)$$

$$\Delta \gamma = \frac{b+p}{b} (\varepsilon \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \cot \alpha) \dots \dots \dots (11)$$

In de vergelijkingen (9), (10) en (11) zijn met α , b en p die waarden bedoeld, die deze grootheden hebben, indien $\beta = 0$. Dit is ook in alle volgende vergelijkingen het geval. De hierdoor ingevoerde fout is oneindig klein van de 2e. orde ten opzichte van de andere termen van deze vergelijkingen. In het vervolg worden als onafhankelijk variabelen, die de beweging karakteriseren, gekozen x , y , θ , ζ en β , en als constanten van de fiets: r_a , r_v , p , b , $\cot \alpha$, I_{xa} , I_{za} , I_{xza} , I_{xv} , I_{zv} , I_{xzv} en de massa's M_v en M_a van respectievelijk het voor- en achtergedeelte van de fiets met berijder. Tenslotte zal ook nog gebruikt worden het traagheidsmoment van het voorwiel I_{wv} en het achterwiel I_{wa} om hun respectievelijke assen.

4. De bewegingsvergelijkingen.

Bij het afleiden van de bewegingsvergelijkingen kan in het onderhavige geval met vrucht gebruik gemaakt worden van de methode van Lagrange, omdat hierbij het achteraf elimineren van de reactiekrachten, die vóór- en achtergedeelte van de fiets op elkaar uitoefenen, wordt vermeden, evenals het uitdrukken van de versnellingen in niet-cartesische coördinaten.

Door twee opmerkingen vooraf te maken, kan bij het opstellen van de vergelijkingen van Lagrange het rekenwerk vereenvoudigd worden.

$$p\Delta\gamma = q\Delta\alpha \quad (7)$$

Using equations 6 and 7 one solves:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -\frac{p}{q-p} \frac{1}{2} \tan \alpha_0 (\varepsilon^2 - \delta^2) \\ \Delta\gamma &= -\frac{q}{q-p} \frac{1}{2} \tan \alpha_0 (\varepsilon^2 - \delta^2) \end{aligned} \quad (8)$$

If all 3rd order (and higher) terms of equation 3 are neglected, it can be simplified to:

$$\delta = \beta \cot \alpha + \varepsilon \quad (9)$$

Placing equation 9 in equation 8 and taking $q - p = b$ then:

$$\Delta\alpha = \frac{p}{b} \left(\varepsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot \alpha \right) \quad (10)$$

$$\Delta\gamma = \frac{b+p}{b} \left(\varepsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot \alpha \right) \quad (11)$$

In equations 9, 10 and 11, the values for α , b and p are the value that these variables have when $\beta = 0$. This will also be the case in all the equations still to come. The error caused by these assumptions is of 2nd order with respect to the other terms in the equations. From here on, x , y , ϕ , ε , and β will be chosen as the independent variables that describe the motion of the bicycle. r_a , r_v , p , b , $\cot \alpha$, I_{xa} , I_{za} , I_{xza} , I_{xv} , I_{zv} , I_{xzv} and the mass's M_v and M_a of the front and rear part of the bicycle with rider are all constants of the bicycle. Finally, the moments of inertia of the front wheel I_{wv} and rear wheel I_{wa} , about their respective axles, will also be used.

4 The equations of motion

The lagrange method can be used for the derivation of the equations of motion. This is possible because retrospective elimination of reaction forces, that the front and rear frames exert on each other, can be avoided and likewise the expressing of accelerations in non-cartesian coordinates can also be avoided.

By noting two points in advance, the calculation work for the formulation of the Lagrange equations can be simplified.

Ten eerste kan men zich ontdoen van de coördinaat x en de hieruit volgende vergelijkingen van Lagrange.

In de richting van de X -as werken slechts krachten, die oneindig klein zijn van de 2e orde, n.l. de componenten in X -richting van de ∞ kleine reactiekrachten in het grondvlak, loodrecht op de snijlijnen van de wielvlakken met het grondvlak. De versnelling en de variaties van V , de snelheid in X -richting, zijn dus ∞ klein van de 2e orde. De term $\frac{1}{2} MV^2$ kan men dus bij het opstellen van de bewegingsenergie voor de vergelijking van Lagrange weglaten. Hetzelfde geldt voor de rotatiesnelheden om de Y -assen, die ook oneindig klein zijn van de 2e orde, hetgeen onmiddellijk volgt uit vergelijkingen (10) en (11).

Ten tweede kan men de gyroscopische momenten ten gevolge van de draaiende wielen beter als uitwendige momenten, dus in de arbeidscoëfficiënten, verwerken, dan deze invloed als rotatie-energie invoeren in de bewegingsenergie T . Bij het berekenen van T zullen dan ook de wielen beschouwd worden alsof zij star aan het desbetreffende gedeelte van de fiets verbonden waren.

Nu zullen wij overgaan tot het uitdrukken van het arbeidsvermogen van het rijwiel T in de coördinaten y , θ , ξ en β .

$$T = T_{za} + T_{oa} + T_{zv} + T_{ov} \dots \dots \dots (12)$$

T_{za} = arbeidsvermogen van beweging van het achtergedeelte van de fiets ten gevolge van de translatie van het zwaartepunt daarvan;

T_{oa} = arbeidsvermogen van beweging van het achtergedeelte ten gevolge van de rotaties om het zwaartepunt daarvan.

T_{zv} en T_{ov} zijn de overeenkomstige grootheden van het voorgedeelte (stuur + vork + voorwiel).

In fig. 5 zijn de snelheden getekend waaraan C_a het zwaartepunt van het achtergedeelte deelneemt; in fig. 6 de snelheden van C_v ; in fig. 7 en 8 zijn de rotatiesnelheden getekend van respectievelijk het achter- en voorgedeelte van de fiets.

Aan de hand van deze figuren verifieert men gemakkelijk de volgende uitdrukkingen (grootheden van de 4e orde verwaarlozend):

$$T_{za} = \frac{1}{2} M_a (\dot{y} + h_a \dot{\xi} + u \dot{\theta})^2 \dots \dots \dots (13)$$

$$T_{zv} = \frac{1}{2} M_v \left(\dot{y} + f \dot{\beta} + (b-a) \dot{\theta} + h_v \dot{\xi} \right)^2 \dots \dots \dots (14)$$

$$T_{oa} = \frac{1}{2} I_{xa} \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} I_{za} \dot{\theta}^2 + I_{xza} \dot{\xi} \dot{\theta} \dots \dots \dots (15)$$

First, one can eliminate the x -coordinate and the resulting Lagrange equations[sic].

Only infinitesimally small forces of 2nd order work in the direction of the X -axis. Namely the components in the X -direction of the ∞ small reaction forces in the ground plane, perpendicular to the lines intersecting the wheel planes with the ground plane. The acceleration and the variations in V , the velocity in the X -direction, are thus ∞ small of 2nd order. The $\frac{1}{2}MV^2$ term can thus be omitted when formulating the kinetic energy Lagrange equation. The same applies to the rotational speeds about the Y -axes, which are also infinitesimally small of 2nd order, as can immediately be seen from equations 10 and 11.

Secondly, it is better to process the gyroscopic moments, which are a result of the rotating wheels, as external moments, thus as energy coefficients, rather than as rotational-energy in the kinetic energy equation T . Thus for the calculation of T , the wheels will therefore be considered as rigidly attached elements to the relevant parts of the bicycle.

We will now proceed by expressing the energy of the bicycle T in the coordinates: y , θ , ε , and β .

$$T = T_{za} + T_{oa} + T_{zv} + T_{ov} \quad (12)$$

T_{za} = the energy of the translational motion of the rear part of the bicycle as a result of the translation of its centre of gravity.

T_{oa} = The energy as a result of the rotational motions of the rear part of the bicycle about its centre of gravity

T_{zv} and T_{ov} are the corresponding values for the front part (handlebars + front fork + front wheel).

In Fig.5 the speeds for which C_a , the centre of gravity of the rear part, participates have been drawn; in Fig.6 the speeds of C_v ; in Fig.7 and 8 the respective rotational speeds for the rear- and front parts of the bicycle have been drawn.

With these figures it is easy to verify the following expressions (4th order variables have been neglected):

$$T_{za} = \frac{1}{2}M_a(\dot{y} + h_a\dot{\varepsilon} + u\dot{\theta})^2 \quad (13)$$

$$T_{zv} = \frac{1}{2}M_v\{\dot{y} + f\dot{\beta} + (b-a)\dot{\theta} + h_v\dot{\varepsilon}\}^2 \quad (14)$$

$$T_{oa} = \frac{1}{2}I_{xa}\dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2}I_{za}\dot{\theta}^2 + I_{xza}\dot{\varepsilon}\dot{\theta} \quad (15)$$

$$T_{OV} = \frac{1}{2} I_{XV} (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon})^2 + \frac{1}{2} I_{ZV} (\dot{\beta} + \dot{\theta})^2 + I_{XZV} (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon}) (\dot{\beta} + \dot{\theta}) \dots \dots \dots (16)$$

De potentiële energie berekenen wij door de zakkings van de zwaartepunten in de gekozen coördinaten uit te drukken. Uit fig. 3, met behulp van de vergelijkingen (9), (10) en (11), vinden wij, dat C_a daalt:

$$U \Delta \alpha + \frac{1}{2} h_a \dot{\epsilon}^2 = \frac{pu}{b} (\epsilon \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \cot \alpha) + \frac{1}{2} h_a \dot{\epsilon}^2$$

en dat C_v daalt:

$$-a \Delta \gamma + \frac{1}{2} h_v \dot{\delta}^2 = - \frac{a(b+p)}{b} (\epsilon \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \cot \alpha) + \frac{1}{2} h_v (\dot{\epsilon} + \beta \cot \alpha)^2$$

zodat de potentiële energie bedraagt:

$$E_{pot} = - gM_a \left\{ \frac{pu}{b} (\epsilon \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \cot \alpha) + \frac{1}{2} h_a \dot{\epsilon}^2 \right\} - gM_v \left\{ - \frac{a(b+p)}{b} (\epsilon \beta + \frac{1}{2} \beta^2 \cot \alpha) + \frac{1}{2} h_v (\dot{\epsilon} + \beta \cot \alpha)^2 \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Bij een willekeurige verplaatsing wordt echter ook nog arbeid verricht door de reactiekrachten P_a en P_v in het grondvlak, loodrecht op de snijlijnen van achterwielvlak met grondvlak en voorwielvlak met grondvlak. Deze krachten beletten het zijdelings slippen van de wielen.

Dan zijn er nog de gyroscopische momenten M_{XV} , M_{ZV} , M_{Xa} en M_{Za} , respectievelijk werkend op het voorgedeelte om X- en Z-as en op het achtergedeelte van de fiets om X en Z-as.

Bedoeld zijn hier de op blz. 6 beschreven assenkruisen, die met de fiets meebewegen. Indien de hoeksnelheden van de wielen ω_v en ω_a oneindig groot zijn ten opzichte van de hoeksnelheden $\dot{\epsilon}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$ en $\dot{\delta}$ bedragen deze momenten (zie fig. 9 en 10):

$$M_{XV} = I_{wv} \omega_v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \dots \dots \dots (18)$$

$$M_{ZV} = I_{wv} \omega_v (\beta \cot \alpha + \dot{\epsilon}) \dots \dots \dots (19)$$

$$M_{Xa} = I_{wa} \omega_a \dot{\theta} \dots \dots \dots (20)$$

$$M_{Za} = I_{wa} \omega_a \dot{\epsilon} \dots \dots \dots (21)$$

$$\begin{aligned}
T_{ov} &= \frac{1}{2}I_{xv}(\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\varepsilon})^2 + \frac{1}{2}I_{zv}(\dot{\beta} + \dot{\theta})^2 + \\
&I_{xzv}(\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\varepsilon})(\dot{\beta} + \dot{\theta})
\end{aligned} \tag{16}$$

The potential energy can be calculated by expressing the drop in height of the centers of gravity in the chosen coordinates. From Fig.3 and with the help of equations 9, 10 and 11 it is found that C_a drops by:

$$U\Delta\alpha + \frac{1}{2}h_a\varepsilon^2 = \frac{pu}{b}(\varepsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot \alpha) + \frac{1}{2}h_a\varepsilon^2$$

and C_v drops by:

$$\begin{aligned}
-a\Delta\gamma + \frac{1}{2}h_v\delta^2 &= -\frac{a(b+p)}{b}(\varepsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot \alpha) + \\
&\frac{1}{2}h_v(\varepsilon + \beta \cot \alpha)^2
\end{aligned}$$

such that the potential energy is:

$$\begin{aligned}
E_{pot} &= -gM_a\left\{\frac{pu}{b}(\varepsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot \alpha) + \frac{1}{2}h_a\varepsilon^2\right\} \\
&gM_v\left\{-\frac{a(b+p)}{b}(\varepsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot \alpha) + \right. \\
&\left.\frac{1}{2}h_v(\varepsilon + \beta \cot \alpha)^2\right\}
\end{aligned} \tag{17}$$

However during any arbitrary displacement work is also performed by the reaction forces P_a and P_v in the ground plane, perpendicular to the lines intersecting rear wheel plane with the ground plane and the front wheel plane with the ground plane. These forces prevent lateral wheel slip.

There are also the gyroscopic moments M_{xv} , M_{zv} , M_{xa} and M_{za} , respectively operating on the front part of the bicycle about the X - and Z -axis and the rear part of the bicycle about the X - and Z -axis.

The on page 6 described local coordinate systems that move with the bicycle are the ones meant here. If the angular speeds of the wheels ω_v and ω_a are infinitely large relative to the angular speeds $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$ and $\dot{\delta}$ then these moments are (see fig.9 and 10):

$$M_{xv} = I_{wv} \omega_v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \tag{18}$$

$$M_{zv} = I_{wv} \omega_v (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\varepsilon}) \tag{19}$$

$$M_{xa} = I_{wa} \omega_a \dot{\theta} \tag{20}$$

$$M_{za} = I_{wa} \omega_a \dot{\varepsilon} \tag{21}$$

De arbeidscoëfficiënten in de vergelijkingen van Lagrange luiden dus:

$$\alpha_y = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} + P_a + P_v = P_a + P_v \dots \dots \dots (22)$$

$$\alpha_\theta = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial \theta} + bP_v + M_{za} + M_{zv} = bP_v + I_{wa} \omega_a \dot{\xi} + I_{wv} \omega_v (\beta \cot \alpha + \dot{\xi}) \dots \dots \dots (23)$$

$$\alpha_\xi = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial \xi} - M_{xv} - M_{xa} = gM_a \left(\frac{pu}{b} \beta + h_a \xi \right) + gM_v \left\{ h_v (\xi + \beta \cot \alpha) - \frac{a(b+p)}{b} \beta \right\} - I_{wv} \omega_v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) - I_{wa} \omega_a \dot{\theta} \dots \dots \dots (24)$$

$$\alpha_\beta = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial \beta} - pP_v + M_{zv} - M_{xv} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = gM_a \frac{pu}{b} (\xi + \beta \cot \alpha) + gM_v \left\{ h_v (\xi + \beta \cot \alpha) \cot \alpha - \frac{a(b+p)}{b} (\xi + \beta \cot \alpha) \right\} - pP_v + I_{wv} \omega_v x (\beta \cot \alpha + \xi) - I_{wv} \omega_v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \cot \alpha \dots \dots \dots (24a)$$

Nu kunnen wij dus overgaan tot het opstellen van de vergelijkingen van Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_y$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \alpha_\theta$$

enz.

De tweede termen in deze vergelijkingen zijn alle = 0, omdat in de uitdrukking voor T alleen de fluxies der coördinaten voorkomen en niet deze coördinaten zelf.

Tenslotte vindt men dus:

The virtual work coefficients in the Lagrange equation are thus:

$$\alpha_y = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial y} + P_a + P_v = P_a + P_v \quad (22)$$

$$\alpha_\theta = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial \theta} + bP_v + M_{za} + M_{zv} = bP_v + I_{wa}\omega_a\varepsilon + I_{wv}\omega_v(\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\varepsilon}) \quad (23)$$

$$\alpha_\varepsilon = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial \varepsilon} - M_{xv} - M_{xa} = gM_a\left(\frac{pu}{b}\beta + h_a\varepsilon\right) + gM_v\left\{h_v(\varepsilon + \beta \cot \alpha) - \frac{a(b+p)}{b}\beta\right\} - I_{wv}\omega_v(\dot{\theta} + \dot{\beta}) - I_{wa}\omega_a\dot{\theta} \quad (24)$$

$$\alpha_\beta = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial \beta} - pP_v + M_{zv} - M_{xv}\frac{\partial \delta}{\partial \beta} = gM_a\frac{pu}{b}(\varepsilon + \beta \cot \alpha) + gM_v\{h_v(\varepsilon + \beta \cot \alpha) \cot \alpha - \frac{a(b+p)}{b}(\varepsilon + \beta \cot \alpha)\} - pP_v + I_{wv}\omega_v x(\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\varepsilon}) - I_{wv}\omega_v(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \cot \alpha \quad (24a)$$

It is now possible to proceed with the formulation of the Lagrange Equation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha_y \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \alpha_\theta \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

The second term in each of these equations is = 0. this is because in each of the expressions for T only the flux of the coordinate appears and not the coordinate self.

Finally one therefore finds:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = M_a(\ddot{y} + h_a \ddot{\xi} + u \ddot{\theta}) + M_v \left\{ \ddot{y} + f \ddot{\beta} + (b-a) \ddot{\theta} + h_v \ddot{\xi} \right\} = \alpha_y \dots \dots \dots (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= M_a(\ddot{y} + h_a \ddot{\xi} + u \ddot{\theta}) u + M_v \left\{ \ddot{y} + f \ddot{\beta} + (b-a) \ddot{\theta} + h_v \ddot{\xi} \right\} (b-a) \\ &\quad + I_{za} \ddot{\theta} + I_{xza} \ddot{\xi} + I_{zv} (\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) + I_{xzv} (\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\xi}) \\ &= \alpha_{\theta} \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} &= M_a(\ddot{y} + h_a \ddot{\xi} + u \ddot{\theta}) h_a + M_v \left\{ \ddot{y} + f \ddot{\beta} + (b-a) \ddot{\theta} + h_v \ddot{\xi} \right\} h_v + \\ &\quad I_{xa} \ddot{\xi} + I_{xza} \ddot{\theta} + I_{xv} (\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\xi}) + I_{xzv} (\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) = \\ &= \alpha_{\xi} \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= M_v \left\{ \ddot{y} + f \ddot{\beta} + (b-a) \ddot{\theta} + h_v \ddot{\xi} \right\} f + I_{xv} (\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\xi}) \cot \beta + \\ &\quad I_{zv} (\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) + I_{xzv} (2 \ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\xi} + \ddot{\theta} \cot \alpha) = \\ &= \alpha_{\beta} \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

Hierbij komen nog de niet-holonome voorwaarden, dat zijdelings slippen van de wielen niet voorkomt:

$$\begin{aligned} v \dot{\theta} - \dot{y} &= 0 \text{ en} \\ v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) - \dot{y} - b \dot{\theta} + p \dot{\beta} &= 0 \end{aligned}$$

waaruit men afleidt:

$$\theta = \frac{v\beta + p\dot{\beta}}{b} \dots \dots \dots (29)$$

$$\ddot{y} = v \dot{\theta} = \frac{v}{b} (v\dot{\beta} + p\ddot{\beta}) \dots \dots \dots (30)$$

Met vergelijkingen (29) en (30) kan men $\dot{\theta}$ en \ddot{y} invullen in de vergelijkingen (25) t/m (28), zodat $\alpha_y, \alpha_{\theta}, \alpha_{\xi}$ en α_{β} zijn uitgedrukt in ξ en β en hun afgeleiden naar de tijd. Deze uitdrukkingen kan men nu substitueren in de volgende, uit vergelijkingen (23) en (25) afgeleide vergelijking:

$$\begin{aligned} \alpha_{\beta} + \frac{p}{b} \alpha_{\theta} &= g M_a \frac{pu}{b} (\xi + \beta \cot \alpha) + g M_v \left\{ h_v (\xi + \beta \cot \alpha) \cot \alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{a(b+p)}{b} (\xi + \beta \cot \alpha) \right\} + I_{wv} \omega_v \left(\frac{b+p}{b} \xi - \frac{v}{b} \beta \cot \alpha \right) \\ &\quad + \frac{p}{b} I_{wa} \omega_a \xi \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = M_a(\ddot{y} + h_a \ddot{\varepsilon} + u \ddot{\theta}) + M_v\{\dot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v \ddot{\varepsilon}\} = \alpha_y \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= M_a(\ddot{y} + h_a \ddot{\varepsilon} + u \ddot{\theta})u + M_v\{\dot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v \ddot{\varepsilon}\}(b-a) \\ &\quad + I_{za}\ddot{\theta} + I_{xza}\ddot{\varepsilon} + I_{zv}(\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) + I_{xzv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\varepsilon}) \\ &= \alpha_\theta \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varepsilon}} &= M_a(\ddot{y} + h_a \ddot{\varepsilon} + u \ddot{\theta})h_a + M_v\{\dot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v \ddot{\varepsilon}\}h_v + \\ &\quad I_{xa}\ddot{\varepsilon} + I_{xza}\ddot{\theta} + I_{xv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\varepsilon}) + I_{xzv}(\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) \\ &= \alpha_\varepsilon \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= M_v\{\dot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v \ddot{\varepsilon}\}f + I_{xv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\varepsilon}) \cot \beta + \\ &\quad I_{zv}(\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) + I_{xzv}(2\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\varepsilon} + \ddot{\theta} \cot \alpha) = \\ &= \alpha_\beta \end{aligned} \quad (28)$$

The non-holonomic conditions, that prevent lateral wheel slip, still have to be added:

$$\begin{aligned} V\theta - \dot{y} &= 0 \quad \text{and} \\ V(\theta + \beta) - \dot{y} - b\dot{\theta} + p\dot{\beta} &= 0 \end{aligned}$$

from which one can deduce:

$$\theta = \frac{V\beta + p\dot{\beta}}{b} \quad (29)$$

$$\ddot{Y} = V\dot{\theta} = \frac{V}{b}(V\beta + p\dot{\beta}). \quad (30)$$

Using equations 29 and 30, $\ddot{\theta}$ and \ddot{y} can be substituted into the equations 25 through 28, such that α_y , α_θ , α_ε and α_β are expressed in terms of ε and β and their time derivative. These expressions can now be substituted into the following equation that has been derived from equations 23 and 25[sic]:

$$\begin{aligned} \alpha_\beta + \frac{p}{b}\alpha_\theta &= gM_a \frac{pu}{b}(\varepsilon + \beta \cot \alpha) + gM_v\{h_v(\varepsilon + \beta \cot \alpha) \cot \alpha \\ &= -\frac{a(b+p)}{b}(\varepsilon + \beta \cot \alpha)\} + I_{wv}\omega_v\left(\frac{b+p}{b}\varepsilon - \frac{v}{b}\beta \cot \alpha\right) \\ &= +\frac{p}{b}I_{wa}\omega_a\dot{\varepsilon}, \end{aligned}$$

waaruit P_a en P_v geëlimineerd zijn, en in vergelijking (24).

Dit geeft twee vergelijkingen met β en ξ als onbekende functies. Gerangschikt naar ξ'' , ξ , ξ , β , β en β zien deze twee vergelijkingen er als volgt uit:

$$\begin{aligned} & (I_{xa} + I_{xv} + h_v^2 M_v + h_a^2 M_a) \xi'' - g(h_a M_a + h_v M_v) \xi + \\ & \left\{ \frac{P}{b} (I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + \sqrt{b-a} h_v M_v) + I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha \right. \\ & \left. + h_v f M_v \right\} \beta + \left\{ I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + (b-a) h_v M_v + \right. \\ & \left. P(h_a M_a + h_v M_v) + \frac{b+P}{b} I_{wv} \omega_v + \frac{P}{b} I_{wa} \omega_a \right\} \frac{v}{b} \dot{\beta} + \\ & \left\{ (h_v M_v + h_a M_a) \frac{v^2}{b} - \frac{P}{b} (u M_a + \sqrt{b-a} M_v) g - g f M_v + \right. \\ & \left. I_{wv} \omega_v \frac{v}{b} + I_{wa} \omega_a \frac{v}{b} \right\} \beta = 0 \dots \dots \dots (31) \\ & \quad \quad \quad * * * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha + h_v f M_v + \frac{P}{b} (I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + (b-a) h_v M_v) \right\} \xi'' - \\ & \left\{ I_{wv} \omega_v + \frac{P}{b} (I_{wv} \omega_v + I_{wa} \omega_a) \right\} \dot{\xi} - \\ & \left\{ \frac{P}{b} (u M_a + \sqrt{b-a} M_v) g + f g M_v \right\} \xi + \left\{ I_{xv} \cot^2 \alpha + \right. \\ & \left. 2 I_{xzv} \cot \alpha + I_{zv} + f^2 M_v + \frac{P^2}{b^2} (I_{za} + I_{zv} + u^2 M_a + \sqrt{b-a}^2 M_v) \right. \\ & \left. + \frac{2P}{b} (I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha + \sqrt{b-a} f M_v) \right\} \beta + \left\{ I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha \right. \\ & \left. + (b-a) f M_v + P f M_v + \frac{P}{b} (I_{za} + I_{zv} + u^2 M_a + \sqrt{b-a}^2 M_v) + \right. \\ & \left. \frac{P^2}{b} (u M_a + \sqrt{b-a} M_v) \right\} \frac{v}{b} \dot{\beta} + \left\{ \left(\frac{pu}{b} M_a + \frac{P}{b} \sqrt{b-a} M_v \right) \right. \\ & \left. \left(\frac{v^2}{b} - g \cot \alpha \right) + I_{wv} \omega_v \frac{v}{b} \cot \alpha \right\} \beta = 0 \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

Dit zijn de op te lossen bewegingsvergelijkingen, die we kortheidshalve zullen schrijven als volgt:

from which P_a and P_v have been eliminated, and in equation 24.

This gives two equations with β and ε as unknown functions. These two equations, when classified according $\ddot{\varepsilon}$, $\dot{\varepsilon}$, ε , $\ddot{\beta}$, $\dot{\beta}$ and β look as follows:

$$\begin{aligned}
& (I_{xa} + I_{xv} + h_v^2 M_v + h_a^2 M_a) \ddot{\varepsilon} - g(h_a M_a + h_v M_v) \varepsilon + \\
& \left\{ \frac{p}{b} (I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + [b - a] h_v M_v) + I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha \right. \\
& \left. + h_v f M_v \right\} \ddot{\beta} + \left\{ I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + (b - a) h_v M_v + \right. \\
& \left. p(h_a M_a + h_v M_v) + \frac{b+p}{b} I_{wv} \omega_v + \frac{p}{b} I_{wa} \omega_a \right\} \frac{V}{b} \dot{\beta} + \\
& \left\{ (h_v M_v + h_a M_a) \frac{V^2}{b} - \frac{p}{b} (u M_a + [b - a] M_v) g - g f M_v + \right. \\
& \left. I_{wv} \omega_v \frac{V}{b} + I_{wa} \omega_a \frac{V}{b} \right\} \beta = 0
\end{aligned} \tag{31}$$

* * *

$$\begin{aligned}
& \{ I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha + h_v f M_v + \frac{p}{b} (I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + (b - a) \\
& h_v M_v) \} \ddot{\varepsilon} - \left\{ I_{wv} \omega_v + \frac{p}{b} (I_{wv} \omega_v + I_{wa} \omega_a) \right\} \dot{\varepsilon} - \\
& \left\{ \frac{p}{b} (u M_a + [b - a] M_v) g + f g M_v \right\} \varepsilon + \{ I_{xv} \cot^2 \alpha + \\
& 2 I_{xzv} \cot \alpha + I_{zv} + f^2 M_v + \frac{p^2}{b^2} (I_{za} + I_{zv} + u^2 M_a + [b - a]^2 M_v) \\
& + \frac{2p}{b} (I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha + [b - a] f M_v) \} \ddot{\beta} + \{ I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha \\
& + (b - a) f M_v + p f M_v + \frac{p}{b} (I_{za} + I_{zv} + u^2 M_a + [b - a]^2 M_v) + \\
& \frac{p^2}{b} (u M_a + [b - a] M_v) \} \frac{v}{b} \dot{\beta} + \left\{ \left(\frac{pu}{b} M_a + \frac{p}{b} [b - a] M_v \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{V^2}{b} - g \cot \alpha \right) + I_{wv} \omega_v \frac{v}{b} \cot \alpha \right\} \beta = 0
\end{aligned} \tag{32}$$

These are the equations of motion that need to be solved, which can be written in short as:

$$a_1 \ddot{\xi} + a_3 \xi + a_4 \ddot{\beta} + a_5 \beta + a_6 \beta = 0 \dots (33)$$

$$b_1 \ddot{\xi} + b_2 \xi + b_3 \xi + b_4 \ddot{\beta} + b_5 \beta + b_6 \beta = 0 \dots (34)$$

De betekenis van de coëfficiënten a_1 t/m b_6 vindt men door vergelijking van de vergelijkingen (33) en (34) met de vergelijkingen (31) en (32).

Beschouwt men a_1 nader, dan ziet men, dat deze uitdrukking voorstelt het traagheidsmoment van de gehele fiets met berijder om de wielbasislijn, indien de stuuruitslag = 0 is. Dit traagheidsmoment zullen wij aanduiden met I_x . Zo kunnen wij ook de in a_5 , a_4 en b_1 voorkomende uitdrukking

$$I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M_a + (b-a) h_v M_v = I_{xz}$$

stellen, waarin I_{xz} het traagheidsproduct is van de gehele fiets met berijder ten opzichte van het assenkruis, dat gevormd wordt door de verticaal door het steunpunt van het achterwiel en de wielbasislijn, gemeten aan de fiets in verticale stand met stuuruitslag = 0. (zie fig. 11 en de daarbij behorende tabel).

Zo vindt men:

$$I_{za} + I_{zv} + u^2 M_a + (b-a)^2 M_v = I_z$$

$$M_v h_v + M_a h_a = S_x$$

$$M_v (b-a) + M_a u = S_z$$

Daarnaast voeren wij nog de volgende transformaties in:

$$\Delta = I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha + h_v f M_v = I_{asc} \cot \alpha + I_{an} + k f M_v \dots (35)$$

$$\Gamma = I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha + (b-a) f M_v = I_{as} - I_{an} \cot \alpha + j f M_v \dots (36)$$

De hierin voorkomende grootheden I_{as} , I_{an} , k en j zijn in fig. 11 en de tabel daarnaast gedefinieerd. Men verifieert vergelijkingen (35) en (36) gemakkelijk met behulp van fig. 11, waaruit o.a. volgt:

$$k = h_v - f \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{en}$$

$$j = b - a - f \sin^2 \alpha$$

In deze notatie (zie fig. 11) worden de coëfficiënten van vergelijkingen (33) en (34):

$$a_1\ddot{\varepsilon} + a_3\varepsilon + a_4\ddot{\beta} + a_5\dot{\beta} + a_6\beta = 0 \quad (33)$$

$$b_1\ddot{\varepsilon} + b_2\dot{\varepsilon} + b_3\varepsilon + b_4\ddot{\beta} + b_5\dot{\beta} + b_6\beta = 0 \quad (34)$$

The meaning of each of the coefficients a_1 through b_6 can be found by comparing equations 33 and 34 with the equations 31 and 32.

Thorough examination of a_1 reveals that the term represents the mass moment of inertia of the complete bicycle with rider about the wheelbase line, when the bicycle steering angle is $=0$. We define I_x as this moment of inertia. In a similar manner the expressions in a_5 , a_4 , and b_1 can be written as:

$$I_{xza} + I_{xzv} + u h_a M - a + (b - a) h_v M_v = I_x$$

in which $I_x z$ is the product moment of inertia of the complete bicycle with rider with respect to the coordinate system that goes vertically through the rear wheel contact point and wheel base line, when the bicycle is upright and the steering angle is $=0$. (see fig.11 and its associated table).

likewise:

$$I_{za} + I_{zv} + u^2 M_a + (b - a)^2 M_v = I_z$$

$$M_v h_v + M_a h_a = S_x$$

$$M_v(b - a) + M_a u = S_z$$

Furthermore the following transformations are also introduced:

$$\Delta = I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha + h_v f M_v = I_{as} \cot \alpha + I_{an} + k f M_v \quad (35)$$

$$\Gamma = I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha + (b - a) f M_v = I_{as} - I_{an} \cot \alpha + j f M_v \quad (36)$$

The parameters I_{as} , I_{an} , k and j are defined in Fig.11 and the the associated table. Equations 35 and 36 are easily verified with the help of Fig.11, from which follows:

$$k = h_v - f \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{and}$$

$$j = b - a - f \sin^2 \alpha$$

Using this notation (see Fig.11) the coefficients in the equations 33 and 34 become:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= I_x ; & a_2 &= 0 ; & a_3 &= -gS_x ; & a_4 &= b_1 = \\
 & & & & & & & \frac{P}{b} I_{xz} + \Delta ; \\
 a_5 &= \frac{V}{b} \left[I_{xz} + P S_x + \frac{b+P}{b} I_{wv} \frac{b}{r_v} + \frac{P}{b} I_{wa} \frac{b}{r_a} \right] \\
 a_6 &= \left(S_x + \frac{I_{wv}}{r_v} + \frac{I_{wa}}{r_a} \right) \frac{V^2}{b} - g \left(\frac{P}{b} S_z + fM_v \right) \\
 b_1 &= a_4 = \frac{P}{b} I_{xz} + \Delta \\
 b_2 &= -V \left[\frac{b+P}{b} \frac{I_{wv}}{r_v} + \frac{P}{b} \frac{I_{wa}}{r_a} \right] \\
 b_3 &= -g \left(\frac{P}{b} S_z + fM_v \right) \\
 b_4 &= \frac{I_{as}}{\sin^2 \alpha} + \frac{P^2}{b^2} I_z + 2 \frac{P}{b} \sqrt{} \\
 b_5 &= \frac{V}{b} \left[\frac{P}{b} I_z + P \left(\frac{P}{b} S_z + fM_v \right) + \sqrt{} \right] \\
 b_6 &= \left(\frac{P}{b} S_z + fM_v + \frac{I_{wv}}{r_v} \cot \alpha \right) \frac{V^2}{b} - g \left(\frac{P}{b} S_z + \right. \\
 & \quad \left. fM_v \right) \cot \alpha
 \end{aligned} \tag{37}$$

5. Afleiding der stabiliteitsvoorwaarden.

De vergelijkingen (33) en (34) lost men op door te stellen:

$$\xi = A e^{\lambda t} \dots \dots \dots (38)$$

$$\beta = B e^{\lambda t} \dots \dots \dots (39)$$

gesubstitueerd in vergelijkingen (33) en (34) geeft dit:

$$(a_1 \lambda^2 + a_3) A + (a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6) B = 0 \dots \dots (40)$$

$$(b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3) A + (b_4 \lambda^2 + b_5 \lambda + b_6) B = 0 \dots \dots (41)$$

Deze vergelijkingen hebben als algemene oplossing $A = B = 0$, dus $\beta = \xi = 0$, dit is het zuiver verticaal en rechtuit rijden. Indien de vergelijkingen echter afhankelijk worden, zijn er ook andere oplossingen mogelijk. Dit is het geval, indien de determinant der coëfficiënten = 0 is.

$$\begin{aligned}
a_1 &= I_x; & a_2 &= 0; & a_3 &= -gS_x; & a_4 &= b_1 = \\
& \frac{p}{b}I_{xz} + \Delta; \\
a_5 &= \frac{V}{b} \left[I_{xz} + pS_x + \frac{b+p}{b}I_{wv} \frac{b}{r_v} + \frac{p}{b}I_{wa} \frac{b}{r_a} \right] \\
a_6 &= \left(S_x + \frac{I_{wv}}{r_v} + \frac{I_{wa}}{r_a} \right) \frac{V^2}{b} - g \left(\frac{p}{b}S_z + fM_v \right) \\
b_1 &= a_4 = \frac{p}{b}I_{xz} + \Delta \\
b_2 &= -V \left[\frac{b+p}{b} \frac{I_{wv}}{r_v} + \frac{p}{b} \frac{I_{wa}}{r_a} \right] \\
b_3 &= -g \left(\frac{p}{b}S_z + fM_v \right) \\
b_4 &= \frac{I_{as}}{\sin^2 \alpha} + \frac{p^2}{b^2}I_z + 2\frac{P}{b}\Gamma \\
b_5 &= \frac{V}{b} \left[\frac{p}{b}I_z + p \left(\frac{p}{b}S_z + fM_v \right) + \Gamma \right] \\
b_6 &= \left(\frac{p}{b}S_z + fM_v + \frac{I_{wv}}{r_v} \cot \alpha \right) \frac{V^2}{b} - g \left(\frac{p}{b}S_z + \right. \\
& \left. fM_v \right) \cot \alpha
\end{aligned} \tag{37}$$

5 Derivation of the stability conditions

The equations 33 and 34 are solved by taking:

$$\varepsilon = Ae^{\lambda t} \tag{38}$$

$$\beta = Be^{\lambda t} \tag{39}$$

substituted into equations 33 and 34 thus gives:

$$(a_1\lambda^2 + a_3)A + (a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6)B = 0 \tag{40}$$

$$(b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3)A + (b_4\lambda^2 + b_5\lambda + b_6)B = 0 \tag{41}$$

The general solution to these equations is $A = B = 0$, thus $\beta = \varepsilon = 0$ which is the solution for the perfectly vertically upright and straight ahead motion. However if the equations become dependant then other solutions are also possible as is the case for when the determinant of the coefficients = 0.

$$\begin{vmatrix} a_1 \lambda^2 + a_3 & a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6 \\ b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 & b_4 \lambda^2 + b_5 \lambda + b_6 \end{vmatrix} = 0$$

Uitgeschreven:

$$\begin{aligned} & (a_1 b_4 - b_1 a_4) \lambda^4 + (a_1 b_5 - b_1 a_5 - b_2 a_4) \lambda^3 + \\ & (a_1 b_6 + a_3 b_4 - a_6 b_1 - b_2 a_5 - b_3 a_4) \lambda^2 + \\ & (a_3 b_5 - b_2 a_6 - b_3 a_5) \lambda + (a_3 b_6 - b_3 a_6) = 0 \quad \dots \quad (42) \end{aligned}$$

Deze vergelijking is identiek met vergelijking (2):

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Met een blik op vergelijkingen (38) en (39) overtuigt men zich ervan, dat voor stabiliteit noodzakelijk is, dat de reële gedeelten van de vier uit vergelijking (2) volgende waarden van λ negatief zijn. De nodige en voldoende voorwaarden voor het negatief zijn van de wortels van een vierde machtsvergelijking luiden nu in de hier gebruikte notaties:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_1 b_4 - b_1 a_4 > 0 \\ \alpha_1 &= a_1 b_5 - b_1 a_5 - b_2 a_4 > 0 \\ \alpha_3 &= a_3 b_5 - b_2 a_6 - b_3 a_5 > 0 \\ \alpha_4 &= a_3 b_6 - b_3 a_6 > 0 \\ \alpha_2 &= a_1 b_6 + a_3 b_4 - b_1 a_6 - b_2 a_5 - b_3 a_4 > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4 \end{aligned}$$

Substitueert men in bovenstaande ongelijkheden de coëfficiënt a_1 t/m b_6 (zie vergelijking 37), dan vindt men de ongelijkheden (43) t/m (47) van de volgende paragraaf.

6. Conclusies, die uit de stabiliteitsvoorwaarden getrokken kunnen worden.

Voor het stabiel zijn van de rechtlijnig vooruitgaande beweging van een rijwiel met een star aan het frame verbonden, niet bewegende berijder, die het stuur niet aanraakt, moet voldaan zijn aan de hierna volgende vijf voorwaarden (43) t/m (47). De betekenis van de daarin voorkomende symbolen is geheel na te gaan aan de hand van fig. 11 en de daarnaast voorkomende tabel.

$$\begin{vmatrix} a_1\lambda^2 + a_3 & a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 \\ b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 & b_4\lambda^2 + b_5\lambda + b_6 \end{vmatrix} = 0$$

expanded:

$$\begin{aligned} & (a_1b_4 - b_1a_4)\lambda^4 + (a_1b_5 - b_1a_5 - b_2a_4)\lambda^3 + \\ & (a_1b_6 + a_3b_4 - a_6b_1 - b_2a_5 - b_3a_4)\lambda^2 + \\ & (a_3b_5 - b_2a_6 - b_3a_5)\lambda + (a_3b_6 - b_3a_6) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

This equation is identical to equation 2:

$$\alpha_0\lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4 = 0 \quad (2)$$

Upon viewing the equations 38 and 39, one is instantly convinced that it is imperative that the real parts of the coefficients of λ in equation 2 be negative for stability to occur upon. The necessary and sufficient conditions for ensuring that the roots of the fourth order equation are negative can now be written, in the notation as used above, as follows:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_1b_4 - b_1a_4 > 0 \\ \alpha_1 &= a_1b_5 - b_1a_5 - b_2a_4 > 0 \\ \alpha_3 &= a_3b_5 - b_2a_6 - b_3a_5 > 0 \\ \alpha_4 &= a_3b_6 - b_3a_6 > 0 \\ \alpha_2 &= a_1b_6 + a_3b_4 - b_1a_6 - b_2a_5 - b_3a_4 > \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3}\alpha_4 \end{aligned}$$

When one substitutes the coefficients a_1 through b_6 (see equation 37) into the above inequalities, then the inequalities 43 through 47, of the next chapter, are found.

6 Conclusions, that can be drawn from the stability conditions

The following five conditions, 43 through 47, must be fulfilled for the straight ahead forward motion of a bicycle, with a non-moving rider that is rigidly attached to the rear frame and not touching the handlebars, to be stable. The significance of the symbols that appear in the equations can be determined using fig. 11 and its accompanying table.

$$\alpha_0 = I_x^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{I_{as}}{I_x} + \frac{P^2}{b^2} \left(\frac{I_z}{I_x} - \frac{I_{xz}^2}{I_x^2} \right) + 2 \frac{P}{b} \left(1 - \frac{I_{xz}}{I_x} \cot \alpha \right) \frac{I_{as}}{I_x} \right. \\ \left. + 2 \frac{(j - \frac{I_{xz}}{I_x} k) fM_v}{I_x} \frac{P}{b} - 2 \left(\cot \alpha + \frac{I_{xz}}{I_x} \right) \frac{I_{an}}{I_x} \frac{P}{b} - \frac{\Delta^2}{I_x^2} \right] > 0 \dots \dots \dots (43)$$

$$\alpha_1 = I_x^2 \left[\left(\frac{I_z}{I_x} - \frac{I_{xz}^2}{I_x^2} - \frac{bS_x}{I_x} \cdot \frac{\Delta}{I_x} + \frac{bfM_v}{I_x} \right) \frac{P}{b} + \left(1 - \frac{I_{xz}^2}{I_x} \cot \alpha \right) \times \right. \\ \left. \frac{I_{as}}{I_x} + \frac{(j - \frac{I_{xz}}{I_x} k) fM_v}{I_x} - \left(\cot \alpha + \frac{I_{xz}}{I_x} \right) \frac{I_{an}}{I_x} + \frac{P^2}{b^2} \left(\frac{bS_z}{I_x} - \frac{bS_x}{I_x} \cdot \frac{I_{xz}}{I_x} \right) \right] \frac{V}{b} > 0 \dots \dots \dots (44)$$

$$\alpha_3 = I_x S_x \left[\left(1 + \frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \left(\frac{b+p}{r_v} \frac{I_{wv}}{I_x} + \frac{P}{r_a} \frac{I_{wa}}{I_x} \right) \frac{V^2}{bg} - \right. \\ \left. \frac{P}{b} \left(\frac{I_z}{I_x} - \frac{S_z}{S_x} \frac{I_{xz}}{I_x} \right) - \frac{(j - \frac{I_{xz}}{S_x}) fM_v}{I_x} - \frac{I_{as}}{I_x} + \frac{I_{an}}{I_x} \cot \alpha \right] \frac{V}{S_x} \\ > 0 \dots \dots \dots (45)$$

$$\alpha_4 = S_x^2 g^2 \left[\left(\frac{S_z}{S_x} \frac{P}{b} + \frac{fM_v}{S_x} \right) \left(\cot \alpha - \frac{S_z}{S_x} \frac{P}{b} - \frac{fM_v}{S_x} \right) - \right. \\ \left. \left(\frac{I_{wv}}{r_v S_x} \cot \alpha - \left(\frac{S_z}{S_x} \frac{P}{b} + \frac{fM_v}{S_x} \right) \left(\frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \right) \frac{V^2}{bg} \right] \\ > 0 \dots \dots \dots (46)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 = & I_x^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{I_{as}}{I_x} + \frac{p^2}{b^2} \left(\frac{I_z}{I_x} - \frac{I_{xz}^2}{I_x^2} \right) + 2 \frac{p}{b} \left(1 - \frac{I_{xz}}{I_x} \cot \alpha \right) \frac{I_{as}}{I_x} \right. \\
& + 2 \frac{\left(j - \frac{I_{xz}}{I_x} k \right) f M_v}{I_x} \frac{p}{b} - 2 \left(\cot \alpha + \frac{I_{xz}}{I_x} \right) \frac{I_{an}}{I_x} \frac{p}{b} - \\
& \left. \frac{\Delta^2}{I_x^2} \right] > 0 \tag{43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = & I_x^2 \left[\left(\frac{I_z}{I_x} - \frac{I_{xz}^2}{I_x^2} - \frac{b S_x}{I_x} \frac{\Delta}{I_x} + \frac{b f M_v}{I_x} \right) \frac{p}{b} + \left(1 - \frac{I_{xz}}{I_x} \cot \alpha \right) \right. \\
& \frac{I_{as}}{I_x} + \frac{\left(j - \frac{I_{xz}}{I_x} k \right) f M_v}{I_x} - \left(\cot \alpha + \frac{I_{xz}}{I_x} \right) \frac{I_{an}}{I_x} + \\
& \left. \frac{p^2}{b^2} \left(\frac{b S_z}{I_x} - \frac{b S_x}{I_x} \frac{I_{xz}}{I_x} \right) \right] \frac{V}{b} > 0 \tag{44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 = & I_x S_x \left[\left(1 + \frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \left(\frac{b + p}{r_v} \frac{I_{wv}}{I_x} + \frac{p}{r_a} \frac{I_{wa}}{I_x} \right) \frac{V^2}{bg} - \right. \\
& \left. \frac{p}{b} \left(\frac{I_z}{I_x} - \frac{S_z}{S_x} \frac{I_{xz}}{I_x} \right) - \frac{\left(j - \frac{I_{xz}}{S_x} \right) f M_v}{I_x} - \frac{I_{as}}{I_x} + \frac{I_{an}}{I_x} \cot \alpha \right] g \frac{V}{b} \\
& > 0 \tag{45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_4 = & s_x^2 g^2 \left[\left(\frac{S_z}{S_x} \frac{p}{b} + \frac{f M_v}{S_x} \right) \left(\cot \alpha - \frac{S_z}{S_x} \frac{p}{b} - \frac{f M_v}{S_x} \right) - \right. \\
& \left. \left\{ \frac{I_{wv}}{r_v S_x} \cot \alpha - \left(\frac{S_z}{S_x} \frac{p}{b} + \frac{f M_v}{S_x} \right) \left(\frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \right\} \frac{V^2}{bg} \right] \\
& > 0 \tag{46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 = I_x S_x \left[\frac{P}{b} \left(\frac{S_z}{S_x} - \frac{I_{xz}}{I_x} - \left(\frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \frac{I_{xz}}{S_x} + \left(1 + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \times \right. \right. \\
 \left. \left. \left(\frac{b+p}{r_v} \frac{I_{wv}}{I_x} + \frac{P}{r_a} \frac{I_{wa}}{I_x} \right) \right\} + \frac{fM_y}{S_x} + \frac{I_{wv}}{r_v S_x} \cot \alpha - \right. \\
 \left. \left(1 + \frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \frac{\Delta}{I_x} + \left(\frac{I_{xz}}{b S_x} + \frac{b+p}{b} \frac{I_{wv}}{r_v S_x} \right) \left(\frac{b+p}{r_v} \frac{I_{wv}}{I_x} + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{P}{r_a} \frac{I_{wa}}{I_x} \right) \right] \frac{v^2}{b} - I_x S_x g \left[\left(\frac{P}{b} \frac{S_z}{S_x} + \frac{fM_y}{S_x} \right) \left\{ \cot \alpha - \right. \right. \\
 \left. \left. 2 \left(\frac{P}{b} \frac{I_{xz}}{I_x} + \frac{\Delta}{I_x} \right) \right\} + \frac{I_{as}}{I_x \sin^2 \alpha} + \frac{P^2}{b^2} \frac{I_z}{I_x} + 2 \frac{P}{b} \frac{\Gamma}{I_x} \right] \\
 > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4 \dots \dots \dots (47)
 \end{aligned}$$

Vervangt men in deze ongelijkheden alle grootheden door hun getalwaarden (zie fig. 11), dan vindt men:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 = 32,1 \text{ kg}^2 \text{m}^4 ; > 0 ; \alpha_1 = 110 \frac{v}{b} \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-1} > 0 ; \\
 \alpha_3 = (762 \frac{v^2}{bg} - 672) \frac{v}{b} \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-3} > 0 ; \\
 \alpha_4 = (7230 - 2310 \frac{v^2}{bg}) \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-4} > 0 ; \\
 \alpha_2 = (1090 \frac{v^2}{bg} - 1145) \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-2} > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \\
 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4
 \end{aligned} \quad (48)$$

Men ziet, dat er een bovengrens voor $\frac{v^2}{bg}$ volgt uit $\alpha_4 > 0$, n.l. $\frac{v^2}{bg} < 3,13$ en een benedengrens uit $\alpha_3 > 0$ n.l. $\frac{v^2}{bg} > 0,88$.

Om echter aan de voorwaarde voor α_2 te voldoen,

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= I_x S_x \left[\frac{p}{b} \left\{ \frac{S_z}{S_x} - \frac{I_{xz}}{I_x} - \left(\frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \frac{I_{xz}}{S_x} + \left(1 + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\frac{b+p}{r_v} \frac{I_{wv}}{I_x} + \frac{p}{r_a} \frac{I_{wa}}{I_x} \right) \right\} + \frac{fM_v}{S_x} + \frac{I_{wv}}{r_v S_x} \cot \alpha - \right. \\
&\quad \left. \left(1 + \frac{I_{wv}}{r_v S_x} + \frac{I_{wa}}{r_a S_x} \right) \frac{\Delta}{I_x} + \left(\frac{I_{xz}}{b S_x} + \frac{b+p}{b} \frac{I_{wv}}{r_v S_x} \right) \left(\frac{b+p}{r_v} \frac{I_{wv}}{I_x} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{p}{r_a} \frac{I_{wa}}{I_x} \right) \frac{V^2}{b} - I_x S_x g \left[\left(\frac{p}{b} \frac{S_z}{S_x} + \frac{fM_v}{S_x} \right) \{ \cot \alpha - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2 \left(\frac{p}{b} \frac{I_{xz}}{I_x} + \frac{\Delta}{I_x} \right) \right\} + \frac{I_{as}}{I_x \sin^2 x} + \frac{p^2}{b^2} \frac{I_z}{I_x} + 2 \frac{p}{b} \frac{\Gamma}{I_x} \right] \\
&> \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4 \tag{47}
\end{aligned}$$

If all the parameters in these inequalities are exchanged for there numerical values (see fig. 11), then one finds:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 32,1 \text{ kg}^2 \text{m}^4 > 0; \quad \alpha_1 = 110 \frac{V}{b} \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-1} > 0; \\
\alpha_3 &= \left(762 \frac{V^2}{bg} - 672 \right) \frac{V}{b} \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-3} > 0 \\
\alpha_4 &= \left(7230 - 2310 \frac{V^2}{bg} \right) \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-4} > 0; \tag{48} \\
\alpha_2 &= \left(1090 \frac{V^2}{bg} - 1145 \right) \text{ kg}^2 \text{m}^4 \text{sec}^{-2} > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \\
&\quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4
\end{aligned}$$

It thus follows from $\alpha_4 > 0$ that there is an upper limit for $\frac{V^2}{bg}$, namely, $\frac{V^2}{bg} < 3,13$ and from $\alpha_3 > 0$ it follows that the lower limit is $\frac{V^2}{bg} > 0,88$.

However to fulfill the condition for α_2 ,

moet $\frac{v^2}{bg} > 1,71$.

Indien dus $3,13 > \frac{v^2}{bg} > 1,71$ of $21,6 \text{ km/u} > v > 16 \text{ km/u}$

is aan alle vijf voorwaarden voldaan en in dit snelheidsgebied is de fiets van fig. 11 dus stabiel.

Om de grootte en de aard van de onstabieliteit buiten voornoemd snelheidsgebied te onderzoeken, beschouwen wij de vergelijking:

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0 \dots \dots (2).$$

Deelt men alle coëfficiënten door α_0 , dan verkrijgt men:

$$\lambda^4 + 2,63 \frac{v}{b} \lambda^3 + (34 \frac{v^2}{bg} - 35,8) \lambda^2 + (23,7 \frac{v^2}{bg} - 20,9) \frac{v}{b} \lambda + 225 - 72 \frac{v^2}{bg} = 0 \dots \dots (49).$$

Voor elke waarde van V kan men de bijbehorende wortels van vergelijking (49) bepalen. Dit levert fig. 2 op, welke reeds in Par. 3 besproken is.

Het is dus vrij eenvoudig om met behulp van de ongelijkheden (43) t/m (47) de stabiliteitsgrenzen en het dynamisch gedrag van een willekeurige fiets te bepalen. Maar, wij willen meer. Wij willen weten welke maatregelen wij moeten nemen om b.v. de onderste stabiliteitsgrens van een bepaalde fiets omlaag te brengen en nog liever een antwoord op de vraag: "Hoe moeten wij de afmetingen van de fiets kiezen om het gunstigste resultaat te verkrijgen voor een bepaald doel?"

De ongelijkheden (43) t/m (47) zijn echter veel te onoverzichtelijk om er zonder meer algemene conclusies uit te trekken. Wel is het mogelijk om na te gaan hoe de stabiliteitsgrenzen veranderen als men van een bepaalde fiets één ding laat veranderen, b.v. het traagheidsmoment van het voorwiel I_w . Door deze verandering worden b, α, j, h, I_x , enz. niet of slechts weinig beïnvloed. Voor al deze grootheden kan men dus de getalwaarden uit fig. 11 invullen, terwijl men voor I_{as} als goede benadering kan schrijven:

$$I_{as} = 1/2 I_w + (r \cos \alpha - p \sin \alpha)^2 M_w + I_s$$

$$\text{en voor } f = \frac{M_w}{M_v} (r \cot \alpha - p) - \frac{S_s}{M_v \sin \alpha}$$

$$\frac{V^2}{bg} > 1,71.$$

Thus if $3,13 > \frac{V^2}{bg} > 1,71$ or $21,6 \text{ km/h} > V > 16 \text{ km/h}$ then all five conditions are met and thus in this speed range the bicycle from fig. 11 is stable.

In order to investigate the size and nature of the instability outside the above mentioned speed range we consider the equation:

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0 \quad (2)$$

If all the coefficients are divided by α_0 , then we get:

$$\begin{aligned} \lambda^4 &+ 2,63 \frac{V}{b} \lambda^3 + (34 \frac{V^2}{bg} - 35,8) \lambda^2 + (23,7 \frac{V^2}{bg} - 20,9) \frac{V}{b} \lambda \\ &+ 225 - 72 \frac{V^2}{bg} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

For every speed V the corresponding roots to equation 49 can be determined. This enables figure 2 to be drawn, the results of which were already discussed in chapter 3.

It is thus relatively easy to determine the stability boundaries and the dynamic behaviour for an arbitrary bicycle using the inequalities 43 through 47. We want to know which measures we have to take to, for example, reduce the lower stability boundary for a certain bicycle, and more importantly we would like an answer to the question: "How should we choose the dimensions of the bicycle such that it best fulfils a certain goal?"

Unfortunately the inequalities 43 through 47 are too obscure to be able to extract general conclusions. However it is possible to determine what the effect of changing one thing for one specific bicycle has on its' stability boundaries. For example the mass moment of inertia of the front wheel I_w can be adjusted. As a result of this change b , α , j , h , I_x , etc. are only influenced only slight bit or, not at all. One can fill in a numerical value for each of these parameters using Fig. 11, whilst for I_{as} a close approximation can be made by writing:

$$\begin{aligned} I_{as} &= \frac{1}{2} I_w + (r \cos \alpha - p \sin \alpha)^2 M_w + I_s \\ \text{and for } f &= \frac{M_w}{M_v} (r \cot \alpha - p) - \frac{S_s}{M_v \sin \alpha} \end{aligned}$$

Men verkrijgt zodoende:

$$\alpha_0 = 16,1 + 65,6 I_w > 0$$

$$\alpha_1 = (92 + 42I_w) \frac{V}{b} > 0$$

$$\alpha_3 = \left[(3160 I_w + 212 I_w^2) \frac{V^2}{bg} - (574 + 404 I_w) \right] \frac{V}{b} > 0 \quad (50)$$

$$\alpha_4 = 7230 - 9440 I_w \frac{V^2}{bg} > 0$$

$$\alpha_2 = (604 + 1955 I_w) \frac{V^2}{bg} - 1013 - 538 I_w >$$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4$$

Aan de eerste twee ongelijkheden is altijd voldaan. De drie andere ongelijkheden geven in een $V - I_w$ diagram een lijn aan, die het diagram verdeelt in een gebied, waarin wél, en een gebied, waarin niet aan de betreffende gelijkheid is voldaan.

In fig. 12 zijn deze lijnen gegeven. De "verboden" zijde van de lijnen is gearceerd. Men ziet, dat de grenzen van het toelaatbare gebied worden gevormd door de vergelijkingen $\alpha_4 = 0$ (bovengrens) en $\alpha_2 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 +$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4 \text{ (ondergrens).}$$

Maakt men het traagheidsmoment van het wiel groter, dan dalen beide grenzen; maakt men het kleiner, dan stijgen de grenzen vrij snel.

In Par. 3 hebben we gezien, dat de bovengrens niet zo belangrijk is, omdat de optredende instabiliteit daarboven zeer gering is. Het is daarentegen voor langzaam fietsen wel van belang, dat de ondergrens laag ligt. Het is dus gewenst het voorwiel van de fiets niet te licht te maken, indien men gemakkelijke bestuurbaarheid bij lage snelheden verlangt.

Op geheel dezelfde wijze zijn in fig. 13 de stabiliteitsgrenzen als functie van de naloop P getekend, en wel voor drie waarden van de stuurashelling α .

In dit geval brengt verkleining van P/b de stabiliteitsgrenzen omlaag en naar elkaar toe. Hetzelfde effect heeft verkleining van $\cot \alpha$. Door de naloop te verkleinen tot 3 tot 5 cm en $\cot \alpha$ tot 0,1 (dit is een bijna verticale stuuras), kan men de onderste stabiliteitsgrens van 16 tot minder dan 11 km/u terugbrengen.

One therefore obtains:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 16, 1 + 65, 6I_w > 0 \\
\alpha_1 &= (92 + 42I_w) \frac{V}{b} > 0 \\
\alpha_3 &= [(3160I_w + 212I_w^2) \frac{V^2}{bg} - (574 + 404I_w)] \frac{V}{b} \\
&> 0 \\
\alpha_4 &= 7230 - 9440I_w \frac{V^2}{bg} > 0 \\
\alpha_2 &= (604 + 1955I_w) \frac{V^2}{bg} - 1013 - 538I_w > \\
&\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4
\end{aligned} \tag{50}$$

The first two inequalities are always satisfied. The three other inequalities each produce a line in a $V - I_w$ diagram, dividing the diagram into a region that does, and a region that does not satisfy the concerning equality.

The lines are given in fig. 12. The “illegitimate” side of the lines has been shaded. One sees that the boundaries of the allowable region are formed by the equations $\alpha_4 = 0$ (upper limit) and $\alpha_2 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \alpha_4$ (lower limit).

If the mass moment of inertia of the wheel is increased, then the boundaries decrease; if it is made smaller, then the boundaries rise quite rapidly.

In chapter 3 we saw that the upper boundary is not that important as the instability caused above this boundary is very small. On the other hand, for cycling slowly, it is important that the lower boundary lies low. Therefore it is desirable not to make the front wheel of the bicycle too light, if one desires easy control at low speeds.

In a similar manner the stability boundaries as a function of the trail p and for three values of the steering axis slope α have been drawn in fig. 13.

In this case decreasing $\frac{p}{b}$ pulls the stability boundaries down and towards each other. Reducing $\cot \alpha$ has the same effect. By reducing the trail to 3 to 5 cm and $\cot \alpha$ to 0.1 (this is an almost vertical steering axis), the lower stability boundary can be reduced from 16 to less than 11 km/h.

Deze veranderingen zouden echter het stuur 35 cm naar voren brengen en hieraan kan moeilijk tegemoet worden gekomen door het stuur naar achteren te verlengen. Twee andere eisen, die men uit de ongelijkheden kan afleiden, zijn n.l., dat het traagheidsmoment van het stuur (met vork, zonder wiel) om de stuuras zo klein mogelijk moet zijn en dat het zwaartepunt van het stuur niet te ver naar achteren mag komen te liggen.

Bij het afleiden van de hiervoor genoemde conclusies is verondersteld, dat wijzigingen van het stuurvoorwielgedeelte geen invloed hebben op de grootheden I_x , I_{xz} , I_z , S , S_z , u , h , j , k en M . Dit maakte de berekeningen vrij eenvoudig en de hierdoor gemaakte fouten zijn gering. Anders staat het met variaties in u en h .

Door verplaatsing van het zwaartepunt worden de traagheidsgrootheden sterk beïnvloed. Hoewel de invloed, vooral van voor- of achterwaartse verplaatsing van het zwaartepunt zeer belangwekkend is, zijn de hiervoor benodigde berekeningen niet uitgevoerd wegens de uitgebreidheid hiervan.

7. Verdere uitbreiding van het stabiliteitsonderzoek.

Wij hebben gezien, dat er nog aanmerkelijke verbeteringen aan de huidige Nederlandse fiets mogelijk zijn, wat betreft het rijgemak bij lage snelheden. Dit is o.a. te bereiken door de naloop te verminderen tot ongeveer 4 cm, de stuuras meer verticaal te stellen, het voorwiel niet te licht te maken en het stuur en voorspatbord zo licht mogelijk uit te voeren.

Deze conclusies zijn afgeleid voor een fiets, waarop een onbeweeglijke berijder zit, die het stuur loslaat. Hoewel het zeer aannemelijk lijkt te veronderstellen, dat een fiets, die onder deze omstandigheden bij lage snelheid stabiel is, ook in werkelijkheid gemakkelijk te berijden is, is het gewenst de theorie uit te breiden voor het geval, dat de berijder wel ingrijpt door krachten op het stuur uit te oefenen en door zijdelings zijn zwaartepunt te verplaatsen.

Het moge op het eerste gezicht vreemd lijken het menselijk ingrijpen mathematisch te behandelen. Men mag evenwel aannemen, dat de mens op de eenvoudigste wijze zal trachten een onstabiele rijtoestand stabiel te maken.

Voorlopige berekeningen hebben aangetoond, dat een fiets bij een snelheid, die niet te ver onder de onderste stabiliteitsgrens ligt, stabiel gemaakt kan worden door met zwakke kracht de stuuruitslagen tegen te werken. Om hetzelfde effect met zijdelingse zwaartepuntsverplaatsing te bereiken, zou men zeer heftige bewegingen moeten maken.

These changes however, would move the handlebars forward by 35 cm, this distance is difficult to compensate by simply extending the handlebars rearwards. Two other demands that are laid upon the handlebars that can be deducted from the inequalities. They are that the mass moment of inertia of the handlebars (including front fork, without the front wheel) about the steering axis should be as small as possible and that the centre of gravity of the handlebars should not come to lie too far towards the rear.

During the deduction of the above mentioned conclusions it was presumed that changes to the handlebars-front wheel part did not influence the parameters I_x , I_{xz} , I_z , S , S_z , u , h , j , k , and M in any way. This made the calculation relatively easy and the mistakes made small. It is however, a different matter for variations in u and h .

The mass moments of inertia values are greatly influenced by the relocation of the centre of gravity. Although the influence of movement of the centre of gravity, foremost in the forward or rearward direction, is highly interesting, the for this purpose required calculations have not been carried out due to their extensiveness.

7 Further extensions to the stability research

We have seen, that significant improvements can be made to the current Dutch bicycle with regard to its' ease of riding at low speeds. This can amongst others, be achieved by reducing the trail to approximately 4 cm, placing the steering axis more vertically, not making the front wheel too light and constructing the handlebars and front mudguard as lightly as possible.

These conclusions have been deducted for a bicycle, on which a rigid rider is placed who has released the handlebars. Although it is highly plausible to presume that a bicycle, that is stable under these circumstances at low speed, will also be easy to ride in real life, it is still desirable to extend the theory for the case, that the rider intervenes by exercising forces on the handlebars and by laterally moving his centre of gravity.

In the first instance it might seem strange to treat the human intervention mathematically. One can nevertheless assume that the human rider will strive to make an unstable riding situation a stable one in the most effortless manner.

Provisional calculations have demonstrated, that a bicycle at a speed, just below the lower stability boundary, can be stabilised by using weak forces to counter the handlebar rotation. Intense movements would be required to attain a similar effect by laterally displacing the centre of gravity.

De onstabilliteit bij hoge snelheid daarentegen is op te heffen door zeer kleine zijdelingse bewegingen, terwijl dit met het stuur slechts kan gebeuren door met grote kracht de eventueel aanwezige stuuruitslag trachten te vergroten.

Men zou in eerste aanleg kunnen veronderstellen, dat deze door de mens teweeg gebrachte krachten en verplaatsingen evenredig zijn met de stuuruitslag, zijdelingse helling, zijwaartse versnelling enz. Kiest men uit deze mogelijkheden de eenvoudigste en meest effectieve, dan is het zeer aannemelijk te veronderstellen, dat men het men het menselijk ingrijpen goed heeft benaderd. Men kan, hiermede rekening houdend, opnieuw de stabiliteitsvoorwaarden opstellen en daarmede wellicht nieuwe gezichtspunten ontdekken.

Men kan het onderzoek nog in een andere richting uitbreiden. Tot nu toe is verondersteld, dat het frame geheel stijf is. Iedereen, die wel eens met losse handen op een damesfiets heeft gereden, weet echter hoe nadelig een slap frame voor de stabiliteit kan zijn. Indien men rekening houdt met de torsiestijfheid van het frame, krijgt men inplaats van een 4e graads- een 6e graads vergelijking in λ , hetgeen wel meer bewerkelijk in de uitwerking der resultaten is, maar toch geen nieuwe principiële moeilijkheden oplevert.

Tot slot nog een opmerking over experimenteel stabiliteitsonderzoek.

Het is natuurlijk mogelijk om een fiets te construeren, waaraan men diverse grootheden, zoals stuurashelling, torsiestijfheid, naloop e.d., kan variëren.

In het licht van het onderhavige onderzoek, waaruit gebleken is hoe ingewikkeld de verschillende eigenschappen van de fiets de stabiliteit beïnvloeden, lijkt het onwaarschijnlijk, dat men op deze wijze tot duidelijke uitspraken zou kunnen komen.

INSTITUUT VOOR RIJWIELONTWIKKELING.

Ir. B.D. Herfkens.

September 1949.

* * *

SZ

S-98-247-50-10-'49

50
km/uur
45
40
35
30
25
20
15
10
5

The instability at high speed on the other hand can be countered by a very small lateral movement, whilst this can only be accomplished with the handlebars by using large forces to try to increase a possible handlebar rotation.

In a first attempt one could assume that the forces and displacements caused by the rider are proportional to the handlebar rotation angle, lean angle, lateral acceleration etc. If one then chooses from these methods, the most simple and most effective one, then it is highly plausible to assume, that the actual rider intervention has been modelled very closely. One can then redetermine the stability conditions, this time taking the above into account and thereby maybe discovering new perspectives.

The research can also be extended in a totally different direction. Till now it has been assumed that the frame is completely stiff. However, anyone who has ridden hands free on a woman's design bicycle, knows how detrimental for the stability a flexible frame can be. If the torsional stiffness of the frame is taken into account then one gets a 6th order equation in λ instead of the 4th order equation, which is a more laborious calculation to carry out, but fundamentally does not add any new complications.

To conclude a remark on experimental stability research is made.

Obviously it is possible to construct a bicycle where one can change many parameters such as the head angle, torsional stiffness, trail etc.

In light of the research project at hand, which has proven how complicated the interaction of the different properties of the bicycle influence its' stability, it seems unlikely that one can make precise statements.

INSTITUUT VOOR RIJWIELONTWIKKELING.

Ir. B.D. Herfkens.

September 1949.

* * *

SZ

S-98-247-50-10-'49

Fig. 2

De wortels $a_1, a_2, a_3 + bi$ en $a_3 - bi$ van de vierde
graadsvergelijking:

$$\lambda^4 + 2.63 \frac{V}{b} \lambda^3 + [34 \frac{V^2}{bg} - 35.8] \lambda^2 + \frac{V}{b} [2.37 \frac{V^2}{bg} - 20.9] \lambda + 225 - 72 \frac{V^2}{bg} = 0$$

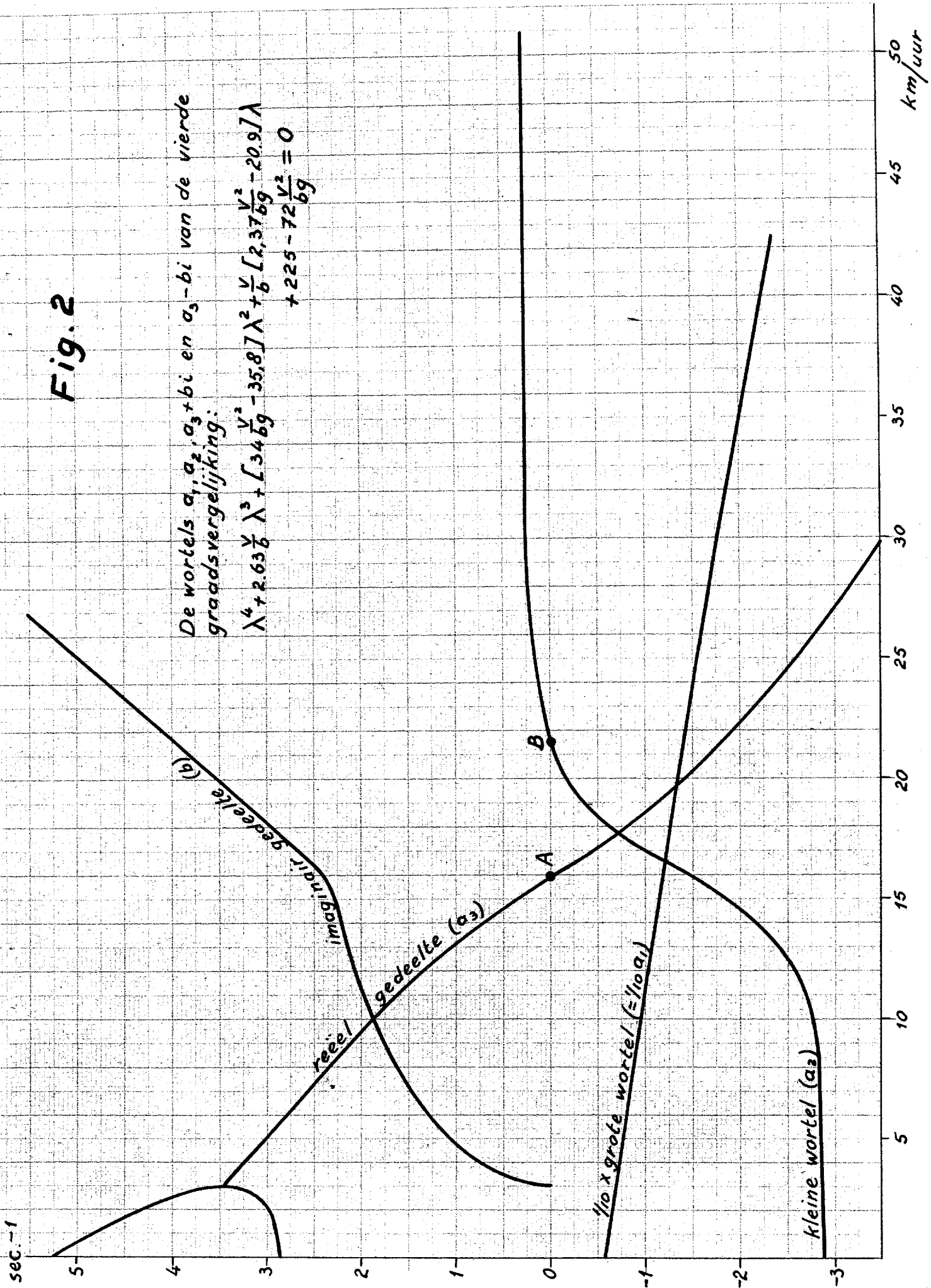


Fig. 2

De wortels $a_1, a_2, a_3 + bi$ en $a_3 - bi$ van de vierde
graadsvergelijking:

$$\lambda^4 + 2.63 \frac{V}{b} \lambda^3 + [34 \frac{V^2}{bg} - 35.8] \lambda^2 + \frac{V}{b} [2.37 \frac{V^2}{bg} - 20.9] \lambda + 225 - 72 \frac{V^2}{bg} = 0$$

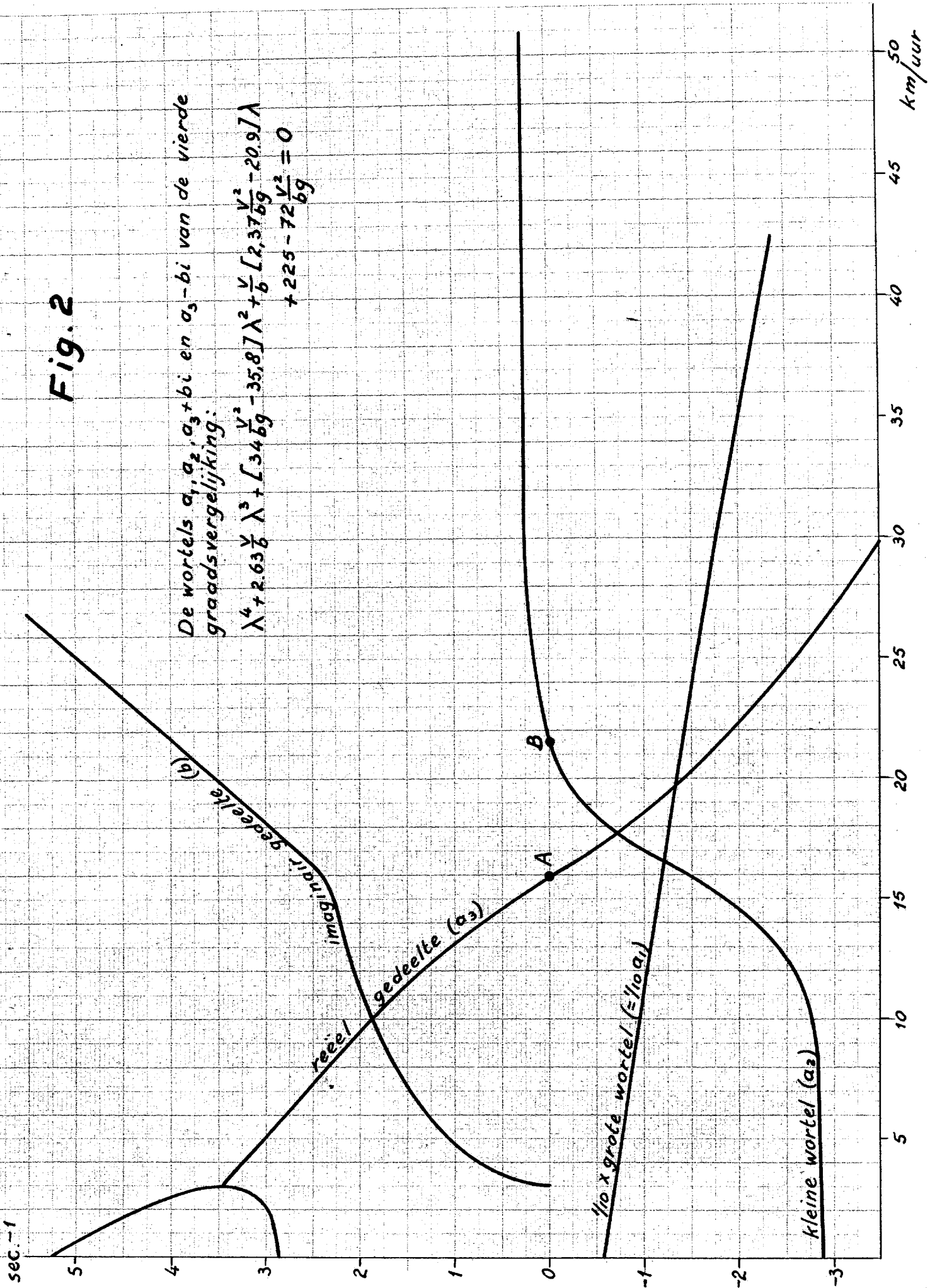


Fig.3

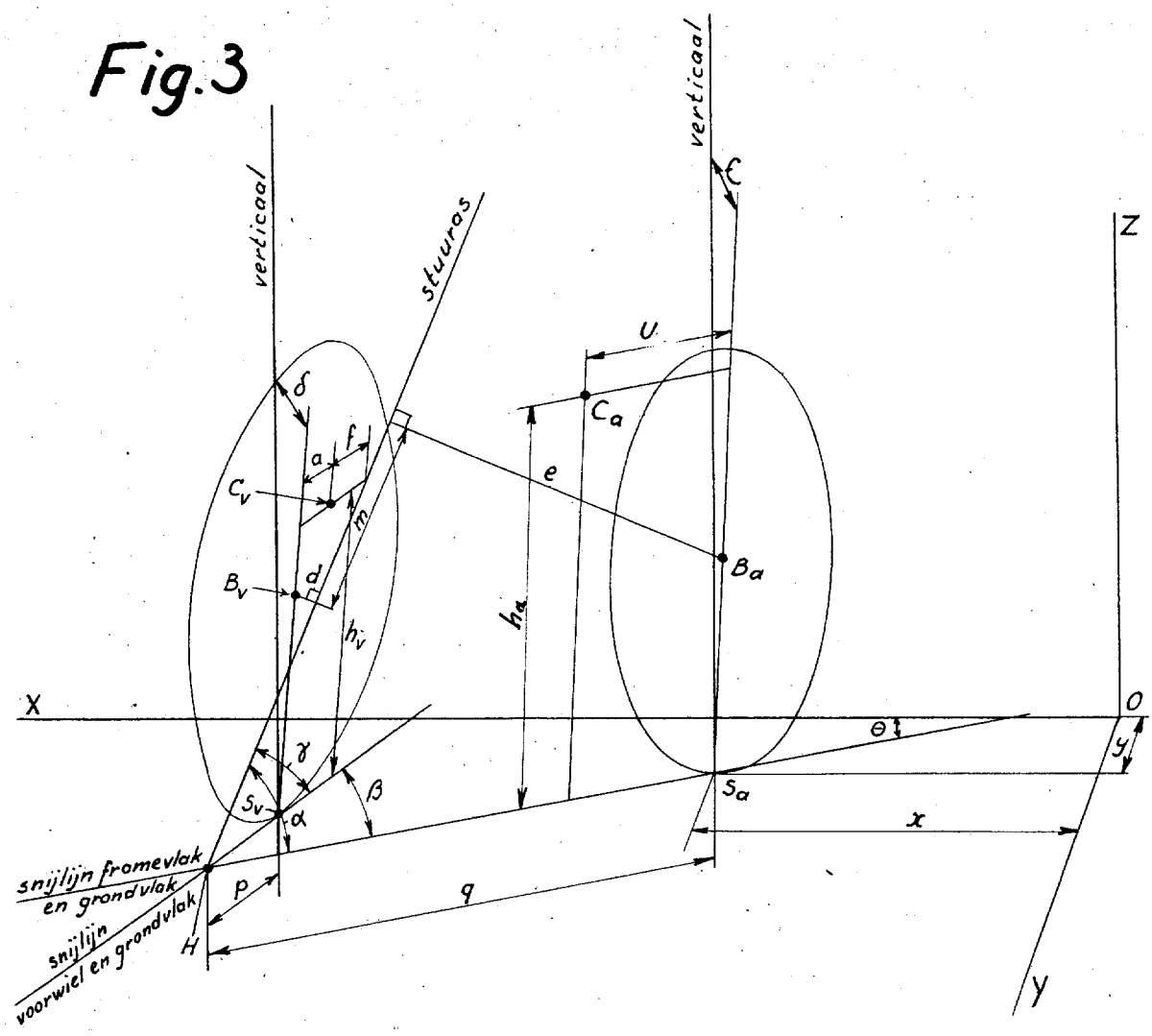


Fig.4

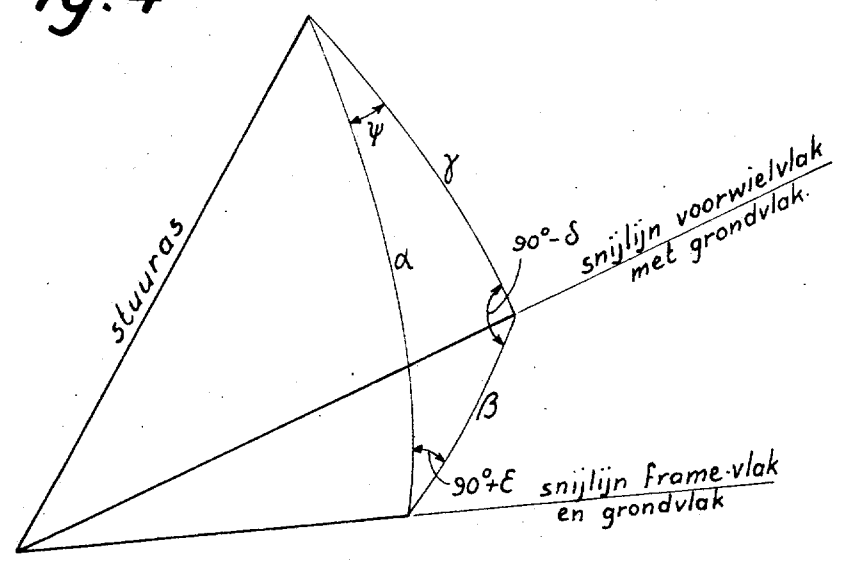


Fig.3

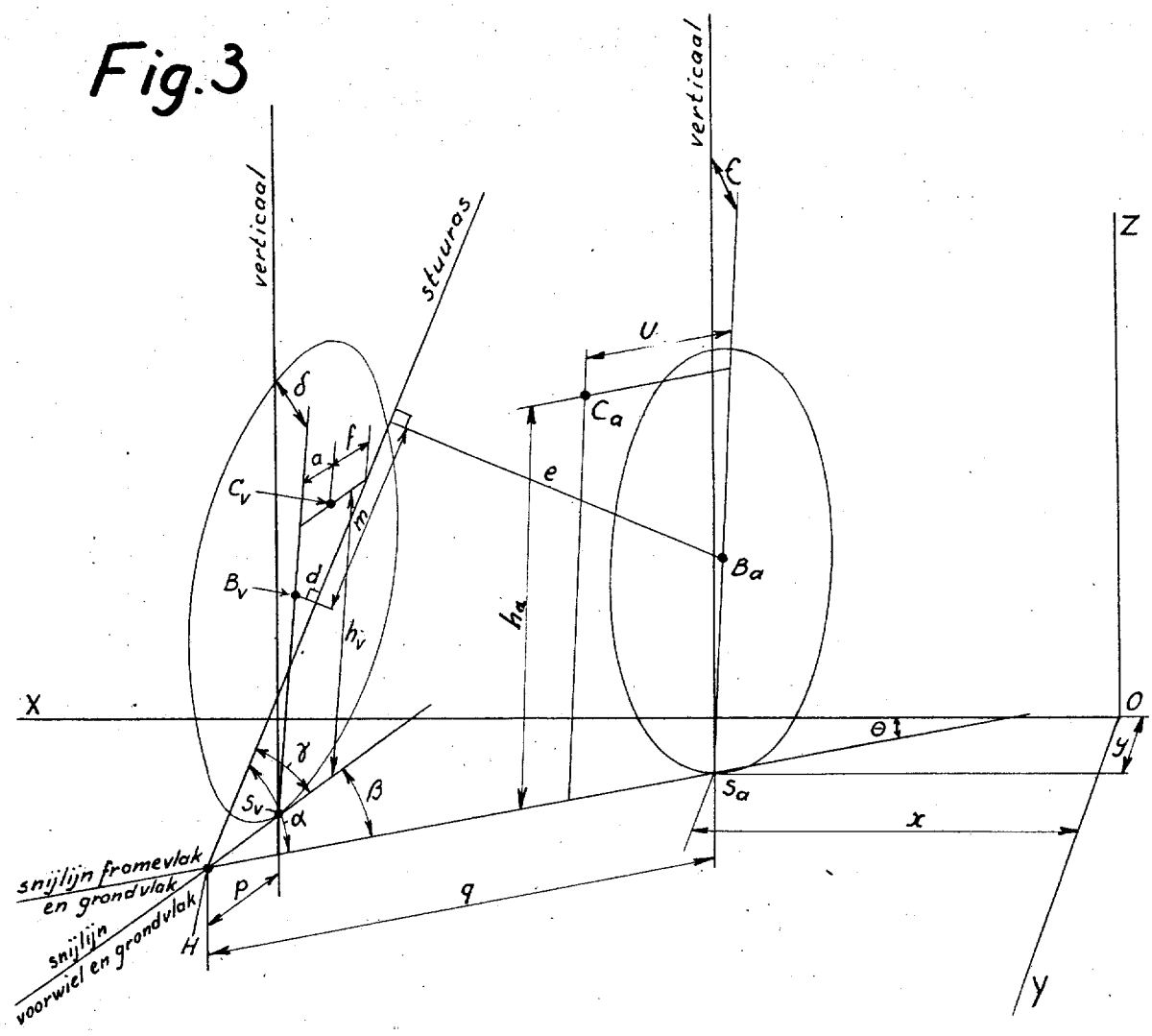
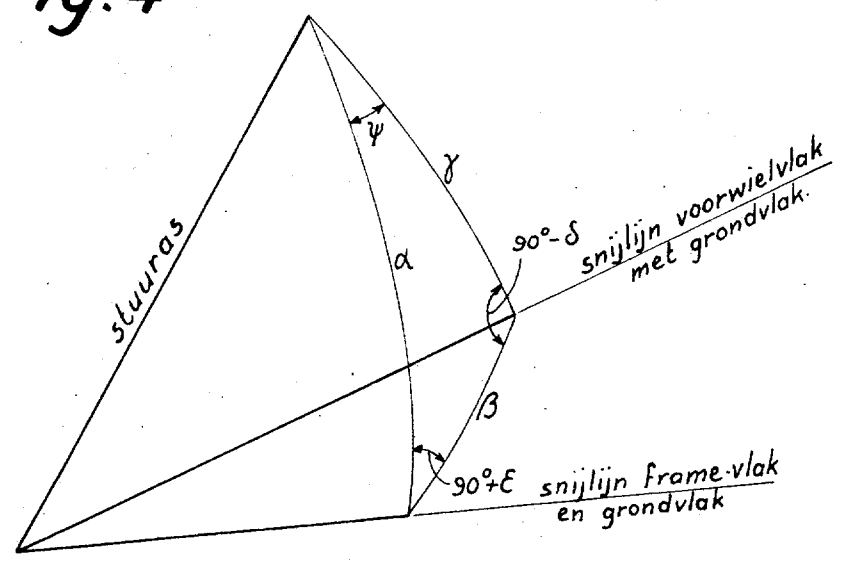


Fig.4



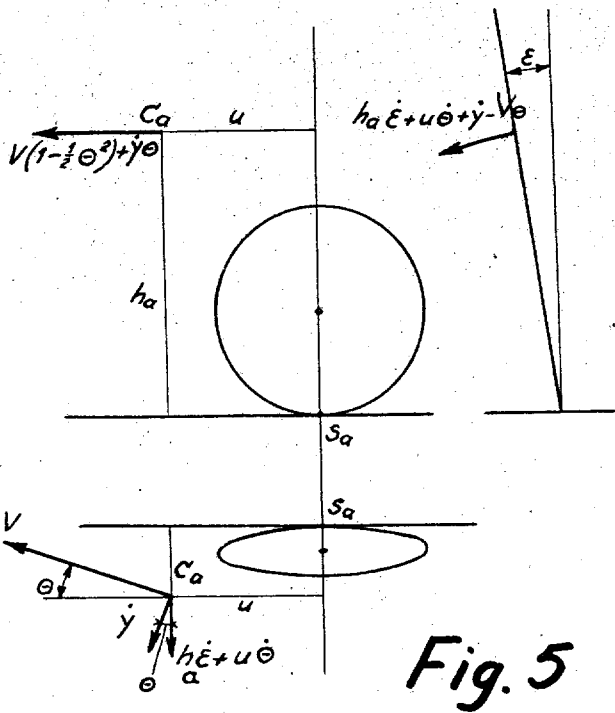


Fig. 5

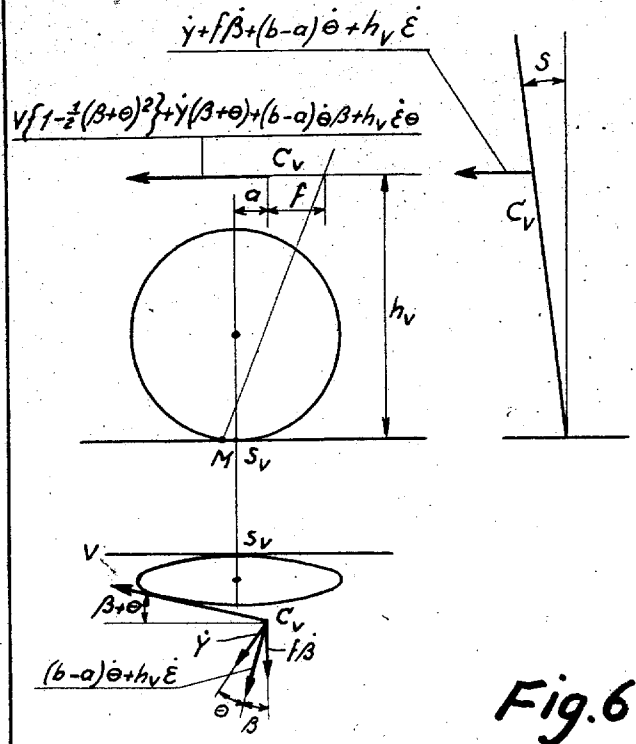


Fig. 6

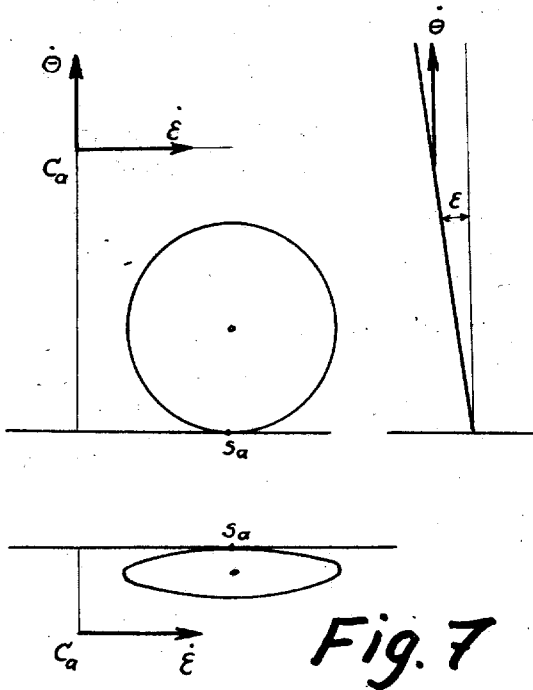


Fig. 7

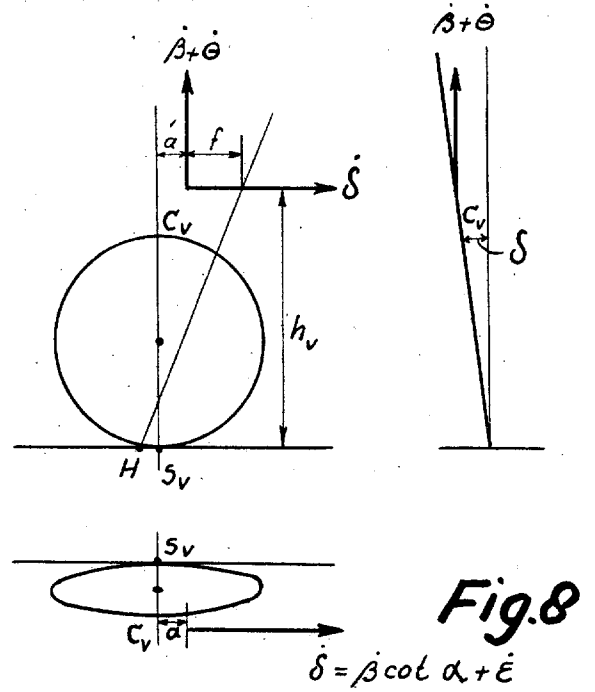


Fig. 8

$$\dot{\delta} = \beta \cot \alpha + \dot{\epsilon}$$

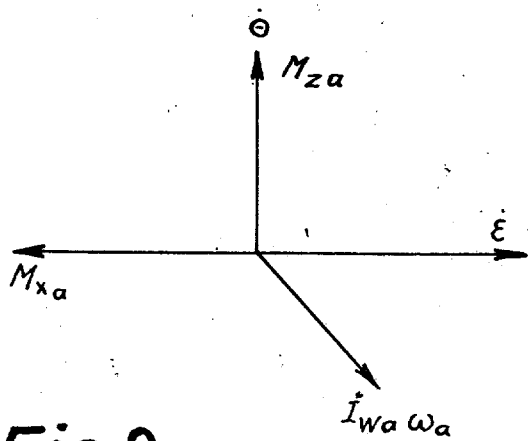


Fig. 9

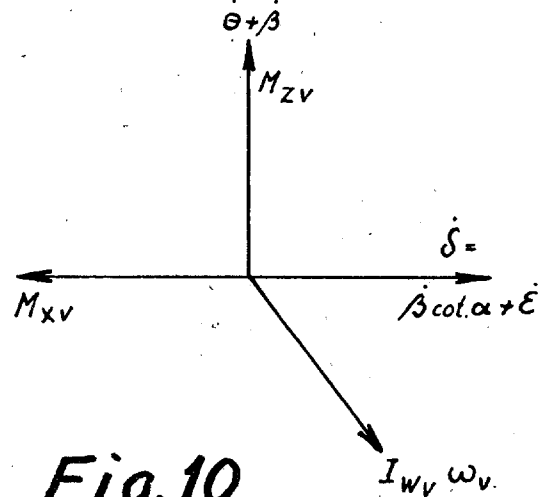


Fig. 10

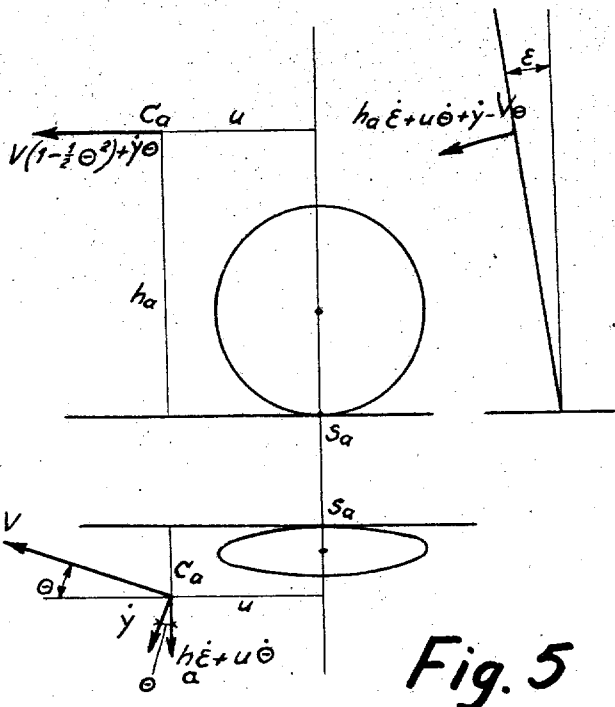


Fig. 5

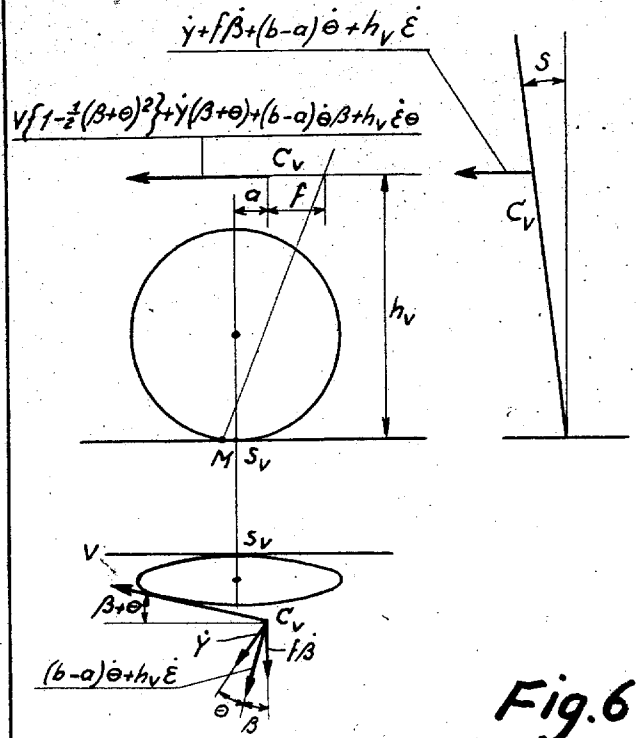


Fig. 6

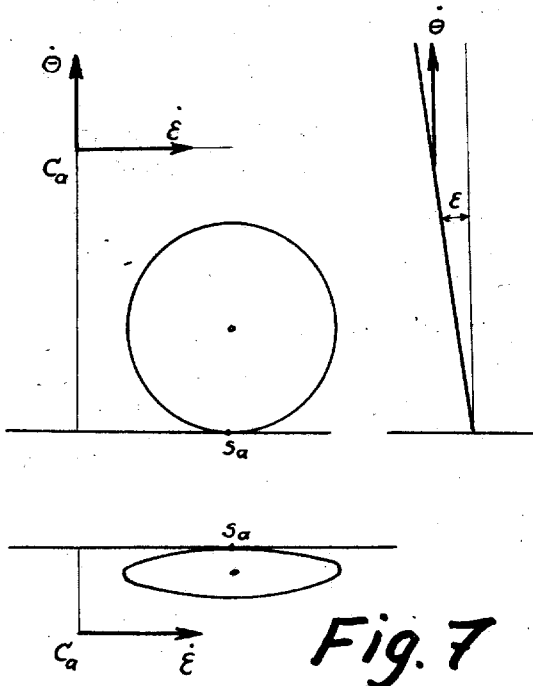


Fig. 7

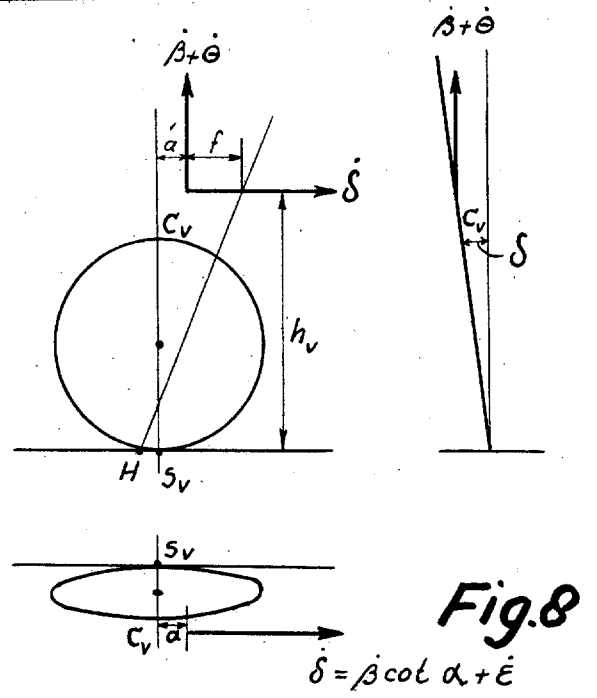


Fig. 8

$\delta = \beta \cot \alpha + \dot{\epsilon}$

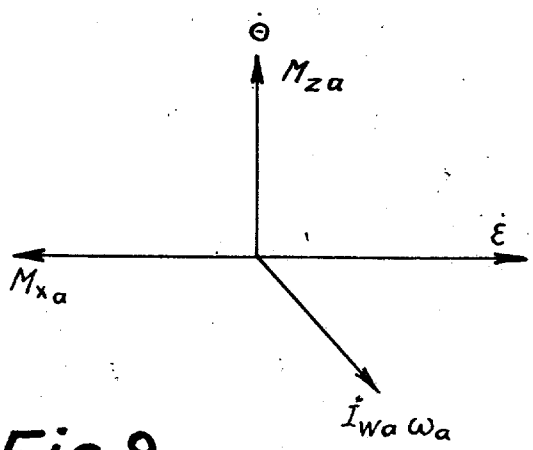


Fig. 9

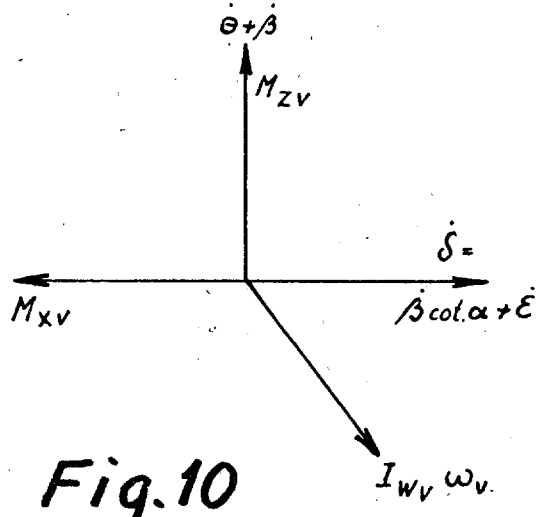
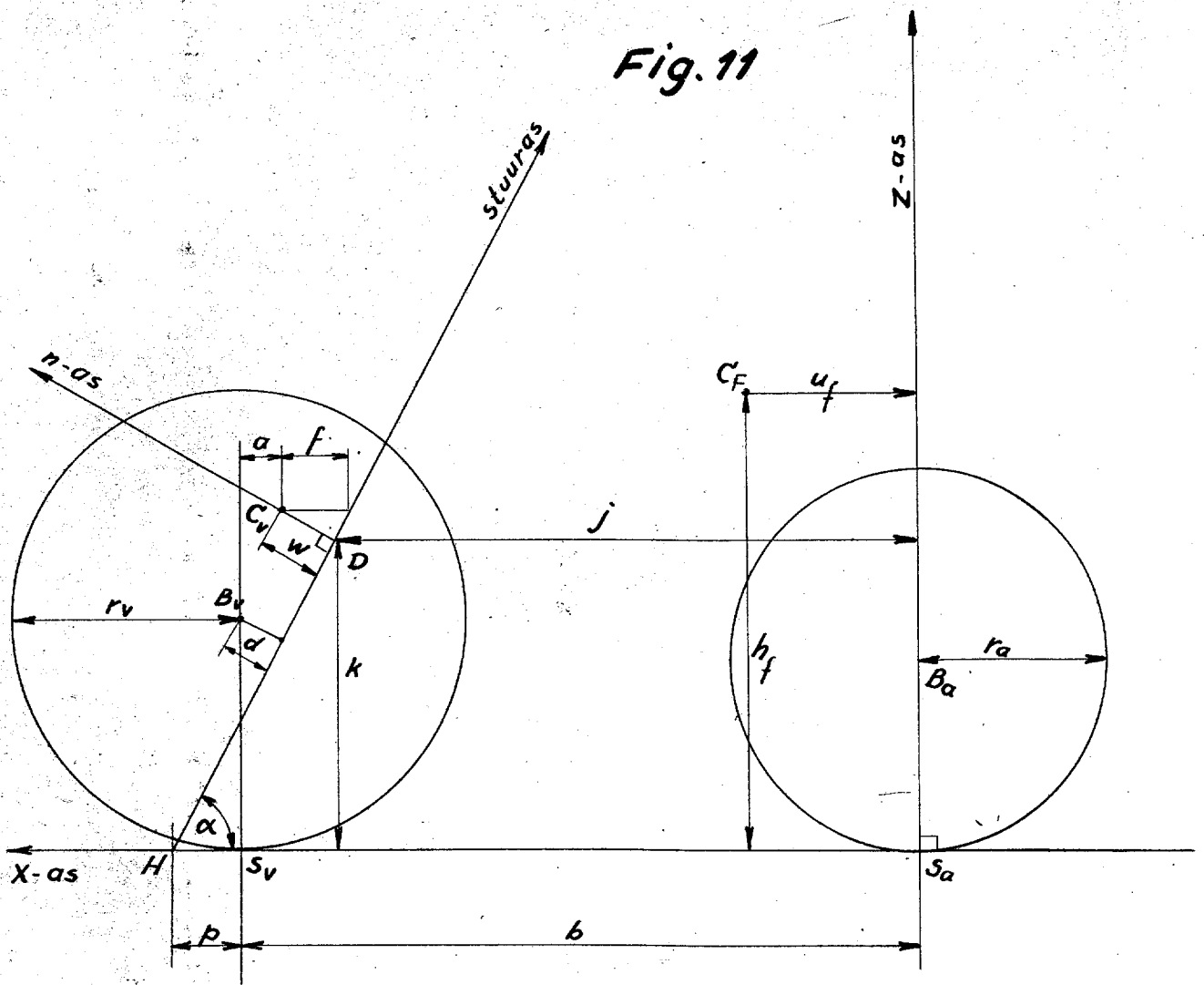


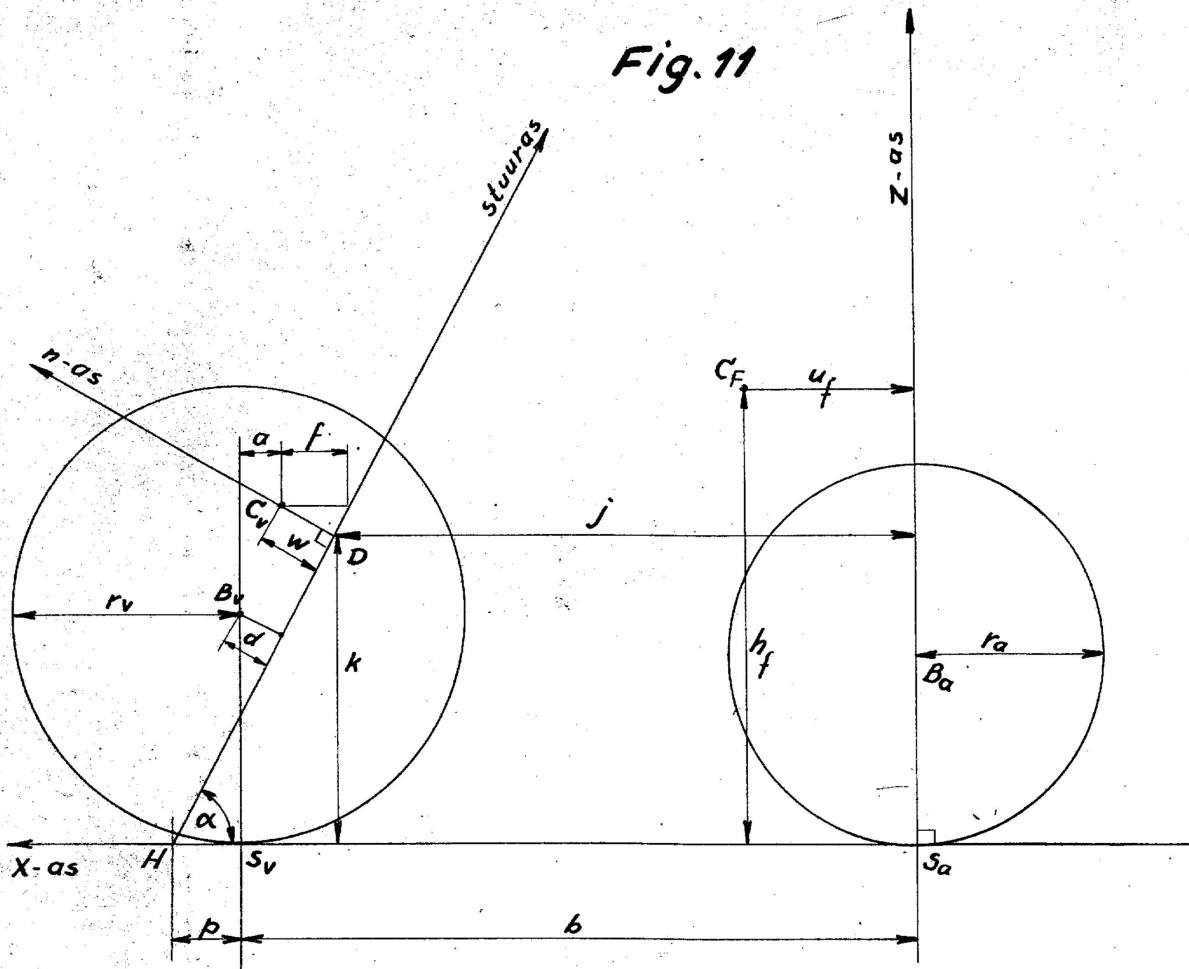
Fig. 10

Fig. 11



- C_f is het zwaartepunt van de gehele fiets met berijder
- C_v " " " " al die delen van de fiets, die met het stuur meebewegen, zoals voorwiel, voorvork, binnenbalhoofdbuis en stuur.
- H is het snijpunt van de stuuras met de grond
- S_v is het steunpunt van het voorwiel
- S_a " " " " " " achterwiel
- B_a " " middelpunt van het achterwiel
- B_v " " " " " " voorwiel
- D " " voetpunt van de loodlijn uit C_v op de stuuras neergelaten.
- $\nabla = I_{as} - I_{an} \cot \alpha + j f M_v$
- $\triangle = I_{as} \cot \alpha + I_{an} + k f M_v$

Fig. 11



- C_f is the location of the centre of gravity of the complete bicycle
- C_v " " " " all the parts of the bicycle that move together with the handlebars such as the front wheel, front fork, inner head tube and handlebars.
- H is the point that the steering axis intersects the ground
- S_v is the contact point of the rear wheel
- S_a " " " " " front wheel
- B_a " " centre of the rear wheel
- B_v " " " " " front wheel
- D " " point on the steering axis that intersects the line perpendicular to the steering axis going through C_v .
- $\Gamma = I_{as} - I_{an} \cot \alpha + j f M_v$
- $\Delta = I_{as} \cot \alpha + I_{an} + k f M_v$

Symbool	Betekenis	waarde bij de gemiddelde Ned. fiets
r_v	straal van het voorwiel	0,35 m
r_a	" " " achterwiel	0,35 m
b	wielbasis = afstand $S_v S_a$	1,17 m
p	naloop = afstand HS_v , de naloop is negatief als S_v vóór H ligt	0,08 m
a	horizontale afstand tussen C_v en de verticaal door S_v	0,12 m
u_f	afstand van C_A tot de verticaal door S_A en B_A (de Z as)	0,33 m
h_f	" " C_A tot het grondvlak (tot de X as)	1,00 m
j	" " D tot de Z as	1,00 m
k	" " D tot de X as (tot het grondvlak)	0,52 m
d	" " B_v tot de stuuras	0,08 m
w	" " C_v " " " " = $C_v D$	0,03 m
f	= $\frac{w}{\sin \alpha}$, de afstand van C_v tot de stuuras, horizontaal gemeten	0,04 m
α	hoek tussen stuuras en het grondvlak	65 °
g	versnelling voor de zwaartekracht	9,81 m/sec ²
M	massa van de gehele fiets met berijder	82,5 kg ¹⁾
M_v	" " het stuur-voorvork-voorwielgedeelte	5,55 kg
M_{wa}	" " het achterwiel	2,65 kg
M_{wv}	" " het voorwiel	2,65 kg
I_{wa}	traagheidsmoment van het achterwiel om zijn as	0,245 kgm ²
I_{wv}	" " " " voorwiel om zijn as	0,245 kgm ²
I_x	" van de gehele fiets + berijder om de X as	98 kgm ²
I_z	" " " " " " " " " Z "	14,7 kgm ²
I_{xz}	traagh.prod." " " " " t.o.v. X en Z as	23,5 kgm ²
I_{as}	traagh.mom. van stuur-voorwielgedeelte om de stuuras	0,195 kgm ²
I_{an}	" prod. " " " " t.o.v.stuuras en n-as	-0,04 kgm ²
I_s	" mom. " stuur,vork,spatbord,lamp enz. zonder wiel	0,05
S_x	= Mh_f het statisch moment v.d.gehele fiets m.berijder om X as	82,5 kgm
S_z	= Mu_f " " " " " " " " " om Z as	27,2 "
S_s	= statisch moment van stuur,spatbord,lamp,enz.om de stuuras	0,005 "

1) de kg als massa-eenheid, niet als kracht

Fig. 12

V/kg
- 2,5

km/h
19

V/kg
18

km/h
17

16

15

14

13

10

0,5
0,2

$M=0$

$\sigma_2 = \frac{0,2 \cdot 0,01 \cdot 0,04}{0,1 \cdot 0,01 \cdot 0,3}$

σ_{150}

σ_{150}

0,5
0,2

0,3

0,4

0,5

0,6

0,7

0,8

0,9

1,0

$I_w \text{ in } K_{um}$

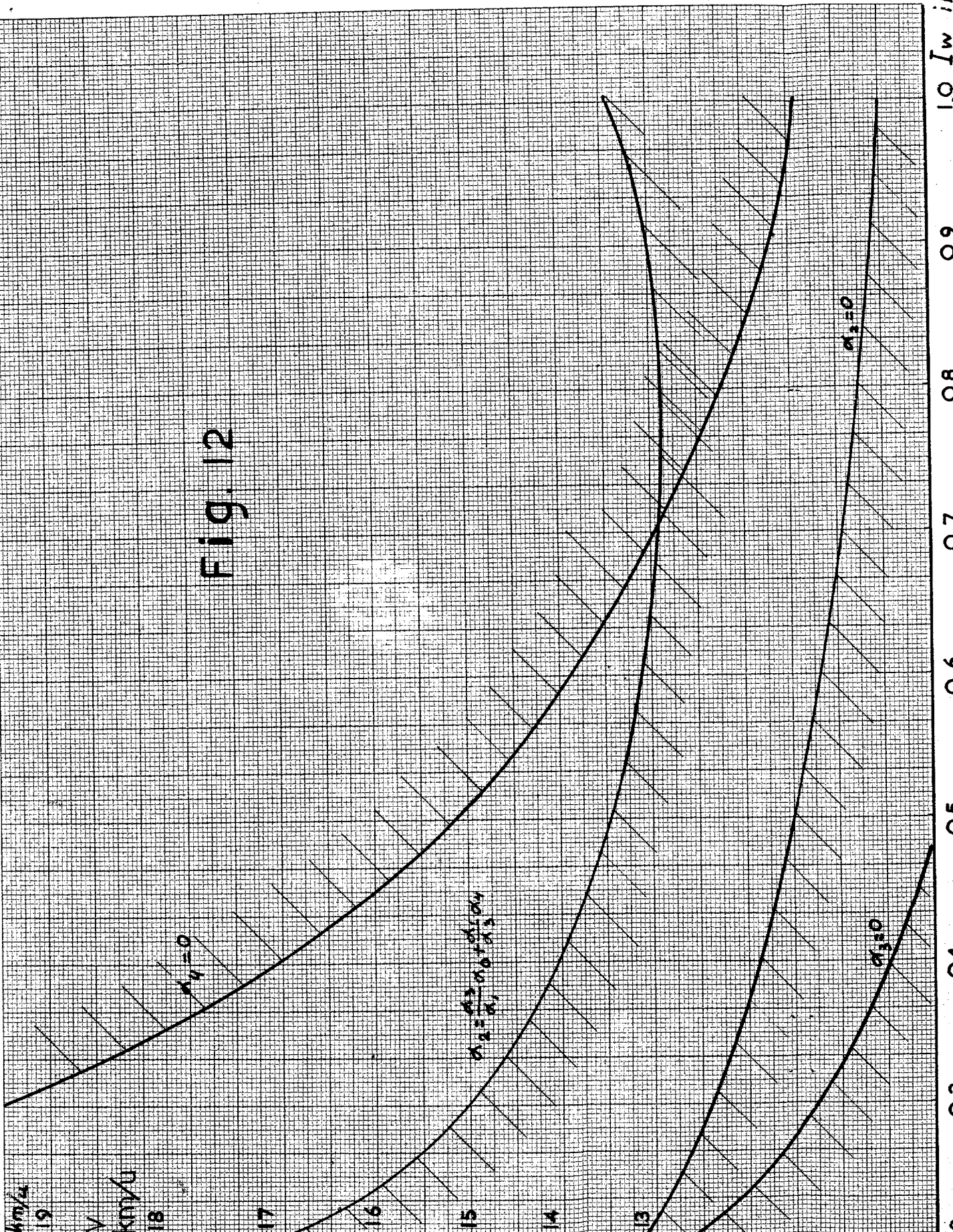


Fig. 12

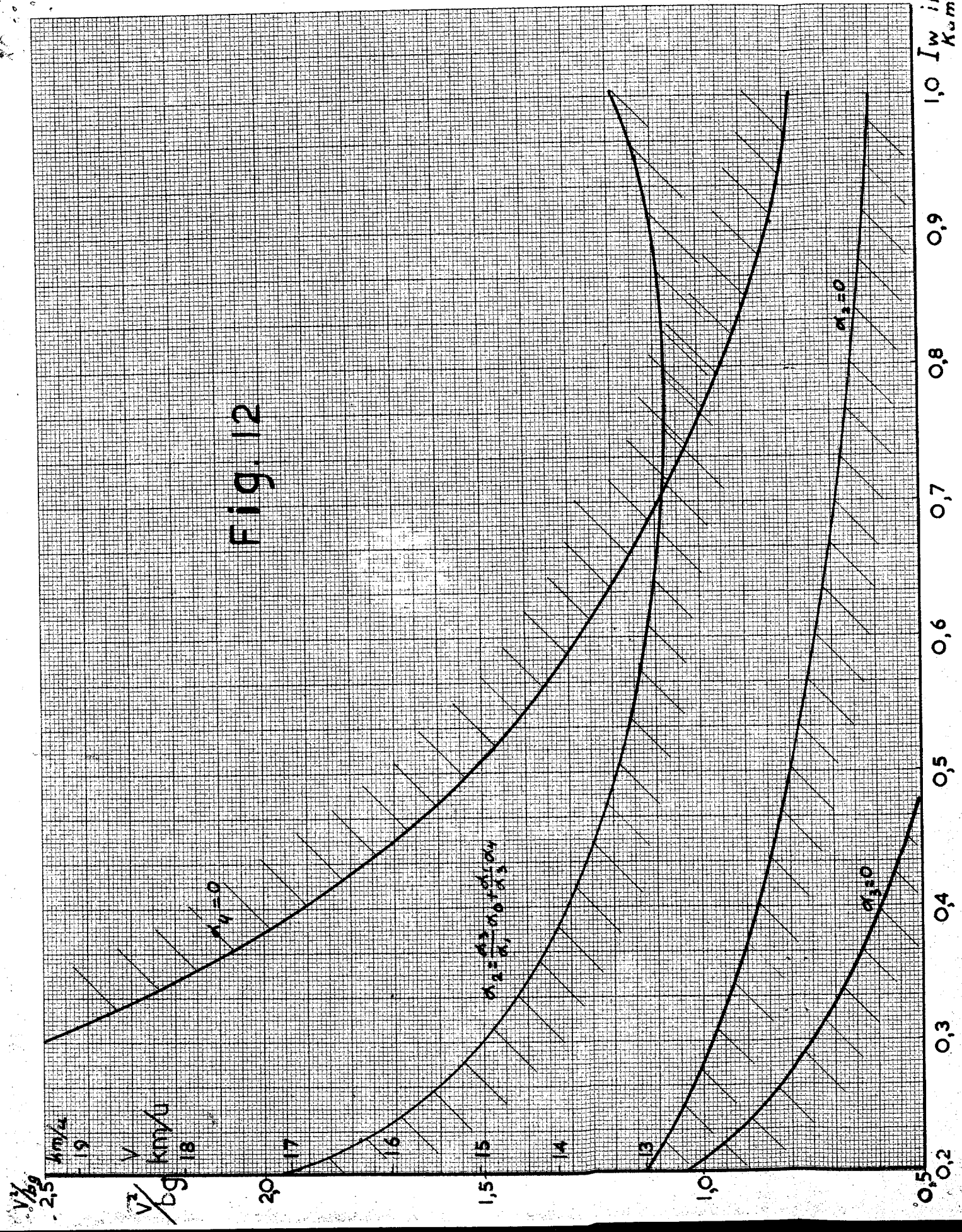


Fig. 13

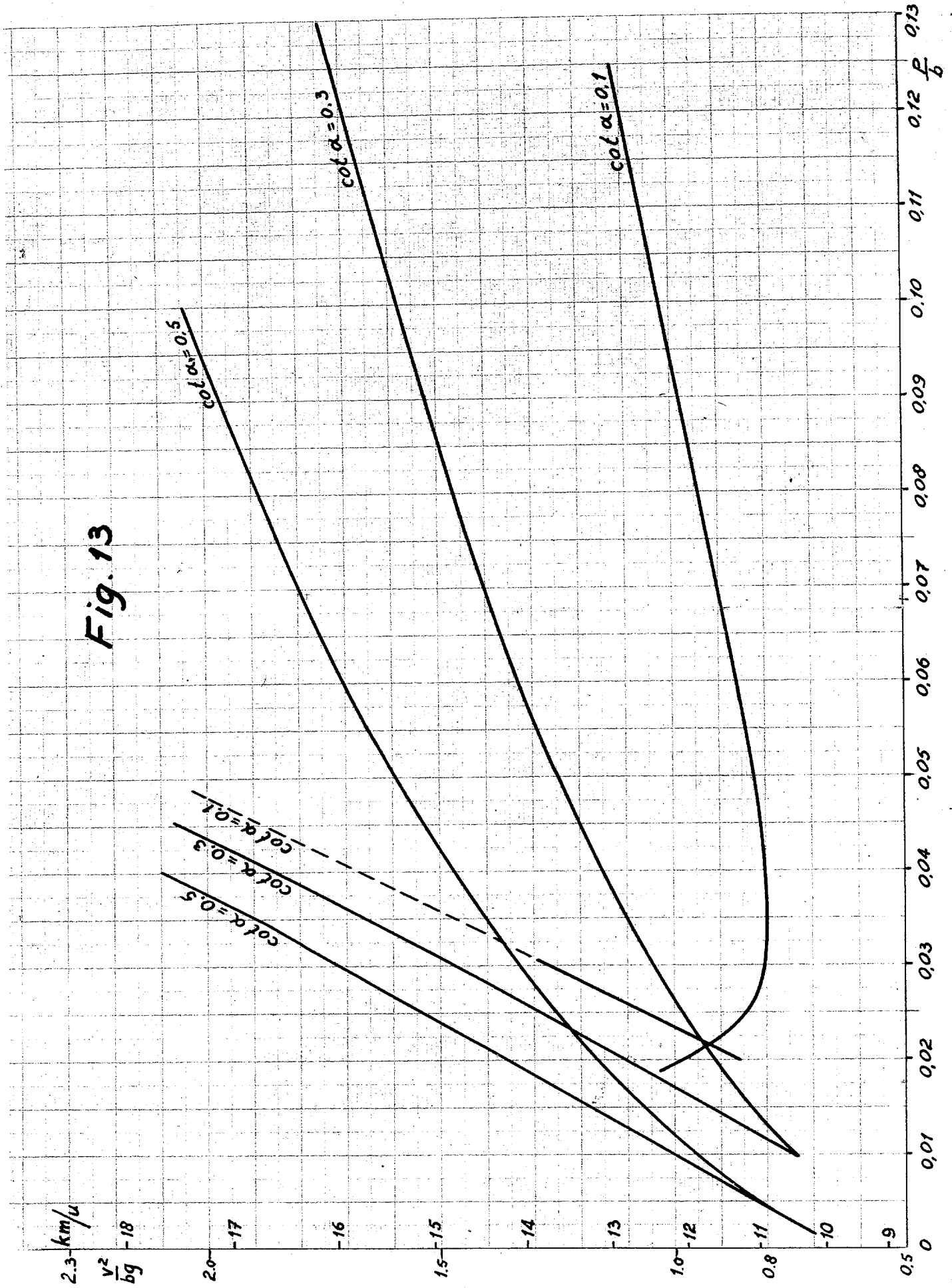


Fig. 13

