COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 28 NOVEMBRE 1898,

PRÉSIDENCE DE M. WOLF.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *Relation qui existe, dans la bicyclette roulant sur un sol horizontal, entre le mouvement de progression et le mouvement d'inclinaison;* par M. **J. Boussinesq**.

« I. Dans la bicyclette, le point le plus bas, que j'appellerai K, de la roue *motrice* (ou roue de derrière) a pour lieu de ses positions successives sur le sol, que nous supposerons horizontal, une courbe tangente au plan médian de cette roue. Cette courbe, en y joignant la vitesse V avec laquelle elle est décrite, définit ce qu'on peut appeler le mouvement de *progression* de la bicyclette sur le sol. Le point le plus bas, que j'appellerai A, de la roue *directrice* (ou roue de devant) est d'ailleurs, à des écarts près négligeables, contenu dans le même plan et situé à une distance sensiblement invariable $KA = a$ du bas K de la roue motrice. De plus, le poids mg de tout le système, constitué presque entièrement par le cavalier et par le cadre de la machine, peut être censé se trouver encore dans le même plan médian, un peu au-dessus du milieu de la selle, en un centre de gravité G situé à une distance sensiblement constante $GB = h$ de la base KBA de la bicyclette, et à une petite distance horizontale également donnée, $KB = b$, en avant du point inférieur K de la roue motrice.

» Pour simplifier, je supposerai ici la masse m du système également concentrée en G, me réservant d'indiquer les modifications qu'entraîne, dans la formule finale de cette Note, la dissémination effective de m tout autour de ce centre de gravité.

» Enfin, l'angle θ du plan médian KBAG de la roue motrice, ou de sa droite BG, avec la verticale, compté positivement ou négativement suivant que ce plan penche, ou non, vers le centre de courbure C de la trajectoire du point K, mesure *l'inclinaison* prise par la bicyclette, et qu'il faut, pour la stabilité, maintenir sans cesse entre d'assez étroites limites de part et d'autre de zéro.

» Nous choisirons, d'une part, sur le sol, un axe ox presque parallèle à l'arc croissant s décrit par le point K aux environs de l'époque t, et un axe normal oy dirigé, de même, presque suivant les sens des rayons de courbure correspondants R de cet arc; d'autre part, un axe oz vertical, s'élevant au-dessus du sol. Les coordonnées x, y du point K seront fonctions du temps t par l'intermédiaire de l'arc s, relativement auquel leurs dérivées successives s'écriront x' et y', x'' et y'', x''' et y''', etc. Quant à la dérivée première de s en t, ce sera la vitesse même V du mouvement progressif de la bicyclette; de sorte que $x, y, x', y', \ldots$ se différentieront en t par la formule symbolique

$$(1) \qquad \frac{d}{dt} = V\frac{d}{ds}.$$

» Dans le plan des xy, les cosinus directeurs de la tangente KBA seront x', y', le premier peu différent de 1, le second très petit; et ceux de la projection horizontale perpendiculaire $h\sin\theta$ de BG, cosinus dont le second est presque 1 (quand cette projection est positive), égaleront, par suite, $-y', x'$. Dès lors, les coordonnées du point B seront $x + bx'$, $y + by'$, et celles de la projection horizontale de G les excéderont de $-hy'\sin\theta$, $hx'\sin\theta$. L'on aura donc pour les trois coordonnées, que j'appellerai ξ, η, ζ, du centre de gravité G, évidemment élevé de $h\cos\theta$ au-dessus du sol,

$$(2) \qquad \xi = x + bx' - hy'\sin\theta, \qquad \eta = y + by' + hx'\sin\theta, \qquad \zeta = h\cos\theta.$$

» II. Cela posé, afin d'éliminer les réactions extérieures, exercées surtout aux deux points principaux K et A de contact de la bicyclette avec le sol à l'époque t, appliquons, à cet instant, le principe des moments au système, par rapport à la droite KA du sol; et imaginons l'axe des x choisi exactement parallèle à cette tangente particulière KA de l'arc s. Les deux composantes non parallèles à KA, $-m\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $-m\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, de l'inertie de la masse m, auront comme bras de levier (tendant à accroître θ) ζ, $-(\eta-y)$, ou $h\cos\theta$, $-h\sin\theta$; et le poids mg aura de même le bras de levier $h\sin\theta$. L'équation des moments sera donc, après division par mh,

$$g\sin\theta-\frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\theta+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\sin\theta=0,$$

ou, vu la différentiation immédiate de $\zeta=h\cos\theta$,

$$g\sin\theta-\frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\theta-h\frac{d^2\theta}{dt^2}\sin^2\theta-h\frac{d\theta^2}{dt^2}\cos\theta\sin\theta=0. \tag{3}$$

» Reste à différentier deux fois en t, grâce à la formule symbolique (1), la valeur (2) de η. Il vient d'abord, comme dérivée première,

$$Vy'+bVy''+hVx''\sin\theta+hx'\frac{d\theta}{dt}\cos\theta,$$

et, comme dérivée seconde,

$$\frac{dV}{dt}y'+V^2y''+b\left(\frac{dV}{dt}y''+V^2y'''\right)$$
$$+h\left(\frac{dV}{dt}x''+V^2x'''\right)\sin\theta+2hVx''\frac{d\theta}{dt}\cos\theta+hx'\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta-\frac{d\theta^2}{dt^2}\sin\theta\right).$$

» Celle-ci se simplifie beaucoup, à raison des formules données par deux différentiations en s de l'identité $x'^2+y'^2=1$, qui définit la variable s, et par une différentiation en t de l'expression $x''^2+y''^2$ du carré $\frac{1}{R^2}$ de la courbure. Ces formules

$$x'x''+y'y''=0,\qquad x'x'''+y'y'''+x''^2+y''^2=0,$$

$$V(x''x'''+y''y''')=\frac{1}{R}\frac{d\frac{1}{R}}{dt},$$

se réduisent, attendu que $x'=1$ et $y'=0$ en K, à

$$x''=0,\qquad x'''=-y''^2,\qquad Vy''y'''=\frac{1}{R}\frac{d\frac{1}{R}}{dt};$$

d'où il résulte, ainsi que de l'expression ci-dessus du carré de la courbure, et vu le signe évidemment positif de y'' (d'après le choix fait de l'axe des y),

$$y'' = \frac{1}{R} \text{ et } V y''' = \frac{d\frac{1}{R}}{dt}.$$

Donc la valeur, changée de signe, de la dérivée seconde de η, à substituer dans (3), est

$$(4) \qquad -\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{V^2}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\sin\theta\right) - b\frac{d\frac{V}{R}}{dt} - h\frac{d^2\theta}{dt^2}\cos\theta + h\frac{d\theta^2}{dt^2}\sin\theta.$$

» Portons enfin cette valeur dans (3) et observons que, l'angle θ devant rester très petit, on peut le substituer à son sinus, réduire son cosinus à l'unité, et réduire aussi à l'unité, dans le second terme de (4), le facteur binome entre parenthèses, à raison de la petitesse tant de θ que du rapport de h à R. L'équation (3), divisée par h, devient alors

$$(5) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{h}\frac{d\frac{V}{R}}{dt} = \frac{g}{h}\theta - \frac{V^2}{hR}.$$

» III. Telle est la relation annoncée entre le mouvement progressif de la bicyclette, défini dans son état actuel par V quant à la vitesse, par R quant à la trajectoire, et son mouvement d'inclinaison, défini par l'angle θ du plan de la roue motrice avec la verticale. La mise en compte de la non-concentration effective de la masse m en G a pour seuls effets d'y faire substituer : 1° à la constante h, la longueur effective, que nous appellerons h', du pendule composé constitué par tout le système, dans sa rotation autour de la base KA, et, 2° à la petite distance b, la somme

$$(6) \qquad b' = b + \frac{1}{h}\int ij\,\frac{dm}{m},$$

où i, j sont, dans le plan médian KGA, les deux coordonnées horizontale et perpendiculaire qui définissent, en projection sur ce plan médian, la situation de chaque élément dm de la masse m, ces coordonnées étant comptées à partir du centre de gravité G. On reconnaît aisément que cette somme b' croît, dans chacune de ses deux parties, quand le cavalier se penche en avant.

» IV. Les dérivées premières, en t, des deux variables V, R caractéristiques du mouvement progressif, dépendent immédiatement de la volonté du cavalier et constituent, entre certaines limites, deux fonctions arbitraires du temps, laissées à sa disposition non seulement pour se diriger et avancer, mais aussi pour éviter toute exagération dangereuse de θ. En effet, l'accélération, $\frac{dV}{dt}$, du mouvement de rotation de la roue motrice à sa circonférence est en rapport direct avec l'action des pieds du cavalier sur les pédales; et, d'autre part, le changement survenu, d'un instant à l'autre, dans le rayon R de courbure, traduit d'une manière tout aussi directe l'action de ses mains, qui règlent, grâce au guidon, le petit angle α fait, sur le sol, par le plan de la roue directrice avec la trace KA du plan de la roue motrice. Car il faut remarquer que, l'extrémité A de la tangente KA à l'arc s se mouvant tangentiellement à la trace du premier de ces plans, la normale AC à cette trajectoire va couper, sous le même angle α, la normale KC à la trajectoire de l'extrémité K. Or l'on reconnaît aisément que l'intersection C de ces deux normales, centre instantané de rotation de KA, se confond avec le centre de la courbure, en K, de l'arc s.

» Effectivement, les coordonnées variables de A sont $x + ax'$, $y + ay'$; et leurs dérivées en s, entre elles comme les cosinus directeurs de la trajectoire du point A, sont $x' + ax''$, $y' + ay''$. Les deux normales KC, AC aux trajectoires ont, dès lors, comme équations respectives (X, Y désignant les coordonnées courantes),

$$\left\{\begin{array}{l}(X - x)x' + (Y - y)y' = 0,\\ (X - x - ax')(x' + ax'') + (Y - y - ay')(y' + ay'') = 0;\end{array}\right.$$

et l'on reconnaît aisément que leur point (X, Y) commun est indépendant de a, ou le même que celui des deux normales

$$\left\{\begin{array}{l}(X - x)x' + (Y - y)y' = 0,\\ (X - x - x'\,ds)(x' + x''\,ds) + (Y - y - y'\,ds)(y' + y''\,ds) = 0,\end{array}\right.$$

menées aux deux points voisins (x, y), $(x + x'\,ds, y + y'\,ds)$ de l'arc s, et qui est le centre C de courbure.

» Le triangle rectangle CKA donne, dès lors, KA $= a =$ R tangα, ou, à raison de la petitesse de α, $a = R\alpha$. Alors l'équation (5), où il est préférable de faire figurer, au lieu de R, l'angle α qui exprime d'une manière presque immédiate l'action des mains du cavalier, devient

$$(7) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b'}{ah'}\frac{d.V\alpha}{dt} = \frac{g}{h'}\theta - \frac{V^2\alpha}{ah'}.$$

» J'y ai substitué, d'ailleurs, à b et à h, les longueurs b' et h', corrigées à raison de la dissémination de la masse m du système autour du centre de gravité G. »

M. Ad. Carnot fait hommage à l'Académie d'une Brochure intitulée : « Sur de nouvelles méthodes d'analyse minérale ». (Extrait du huitième fascicule de 1898 des *Annales des Mines*.)

Cette Brochure contient l'exposé d'un grand nombre de méthodes analytiques données par l'auteur, en dehors de celles qui ont été publiées précédemment dans le même Recueil.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

M. Th. Timbaud adresse un Mémoire relatif à un « projet d'enlèvement et de destruction des ordures ménagères ».

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre de la Guerre informe l'Académie qu'il a désigné MM. *Cornu* et *Sarrau* pour faire partie du Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique pendant l'année scolaire 1898-1899, au titre de Membres de l'Académie des Sciences.

M. Depéret, nommé Correspondant pour la Section de Minéralogie, adresse ses remercîments à l'Académie.

ASTRONOMIE. — *Sur une méthode différentielle propre à déterminer les variations de la latitude et la constante de l'aberration*. Note de M. G. Bigourdan, communiquée par M. Lœwy.

« Depuis assez longtemps on avait été conduit à penser que la latitude peut subir en un même lieu des changements appréciables; mais ce n'est guère que dans les dix dernières années qu'il a été fait des déterminations